

Calcul numérique

« Toute chose est nombre. »

Pythagore

I. Priorités opératoires

Définition 1 : Convention

Les règles de priorité sont :

1. les calculs contenus **entre parenthèses** (ou crochets) sont prioritaires sur les calculs situés en dehors de ces parenthèses. La barre d'une fraction ou d'une racine carrée joue le rôle d'une parenthèse ;
2. les **exposants** sont prioritaires sur les multiplications, divisions, additions et soustractions ;
3. les **multiplications et divisions** sont prioritaires sur les additions et soustractions.

Exemples

Calcul de $A = 15 - 2 \times 4^2$

$$A = 15 - 2 \times 16$$

$$A = 15 - 32$$

$$A = -17$$

Calcul de $B = (7 + 2^3) \times 3$

$$B = (7 + 8) \times 3$$

$$B = 15 \times 3$$

$$B = 45$$

II. Nombres relatifs

A. Opposé

Définition 2 : Opposé

L'opposé d'un nombre relatif a est le nombre $-a$.

Remarque

L'écriture $-a$ ne désigne pas nécessairement un nombre négatif :

- Si a est **positif**, $-a$ est **négatif**.
- Si a est **négatif**, $-a$ est **positif**.

B. Multiplication

Définition 3 : Multiplication de nombres relatifs

La multiplication de deux nombres relatifs a et b est l'opération dont le résultat, appelé **produit** de a et b , est le nombre relatif tel que :

- Sa distance à zéro est égale au produit des distances à zéro de a et b ;
- Son signe est déterminé par la **règle des signes** :
 - Le produit de deux nombres de même signe est positif ;
 - Le produit de deux nombres de signes contraires est négatif.

Exemples

$$\begin{aligned} (+4) \times (+7) &= +(4 \times 7) = +28 = 28 \\ (-2,5) \times (-10) &= +(2,5 \times 10) = +25 = 25 \\ (-4) \times (+7) &= -(4 \times 7) = -28 \\ (-2,5) \times (+10) &= -(2,5 \times 10) = -25 \end{aligned}$$

+	×	+	=	+
+	×	-	=	-
-	×	+	=	-
-	×	-	=	+

Remarques

- En multipliant un nombre par (-1) on obtient son opposé.
- Le carré d'un nombre est toujours positif.

Propriété 1 : Règle des signes généralisée pour les produits littéraux

Un produit de nombres relatifs est

- de signe « + » si le nombre de facteurs de signe « - » est pair,
- de signe « - » si le nombre de facteurs de signe « - » est impair.

Exemple

$$\begin{aligned} A &= -20 \times 1,25 \times (-5) \times 8 \times (-3,7) \\ A &= -20 \times 1,25 \times 5 \times 8 \times 3,7 \\ A &= -(20 \times 5) \times (1,25 \times 8) \times 3,7 \\ A &= -100 \times 10 \times 3,7 = -3\,700 \end{aligned}$$

Il y a 3 facteurs négatifs
donc le signe sera -
On fait des regroupements

III. Écriture fractionnaire

A. Écritures équivalentes

Propriété 2 : Propriété

On ne change pas la valeur d'un nombre en écriture fractionnaire en multipliant (ou en divisant) son numérateur **ET** son dénominateur par un même nombre relatif non nul.

C'est-à-dire :

$$\frac{a}{b} = \frac{a \times k}{b \times k} \quad \text{et} \quad \frac{a}{b} = \frac{a \div k}{b \div k}$$

où a, b, k sont des nombres relatifs avec $b \neq 0$ et $k \neq 0$.

Exemples

1. Réduire les écritures fractionnaires :

$$\frac{1,8}{-4,2} = \frac{18}{-42} = \frac{9}{-21} = \frac{3}{-7} = \frac{-3}{7} = -\frac{3}{7}$$

2. Comparer $\frac{2}{4}$ et $\frac{5}{3}$.

Remarque

Donner le résultat sous la forme d'une fraction la plus simple possible : « fraction irréductible ».

B. Fraction d'une quantité

Propriété 3 : Fraction d'une quantité

- Prendre la fraction $\frac{a}{b}$ de la quantité numérique c , c'est prendre une quantité égale à $\frac{a}{b} \times c$;
- Pour tous nombres a, b, c ($b \neq 0$)

$$\frac{a}{b} \times c = \frac{a \times c}{b} = a \times \frac{c}{b}$$

Exemple

$$\frac{3}{4} \times 24 = \frac{3 \times 24}{4} = 3 \times \frac{24}{4} = (3 \times 6 = 18)$$

Propriété 4 : Conséquence

Pour tous nombres a et b ($b \neq 0$), $\frac{a}{b} \times b = a$

C. Égalité

Propriété 5 : Égalité des produits en croix

a , b , c et d désignent quatre nombres relatifs avec b et d non nuls. Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ alors $ad = bc$.

Réciproquement, Si $ad = bc$ alors $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

Exemples

1. Les fractions $\frac{273}{379}$ et $\frac{147}{203}$ sont-elles égales ?
2. Calculer la valeur du nombre x dans l'expression : $\frac{3}{x} = \frac{4,8}{7}$.

D. Addition et soustraction

Définition 4 : Règle d'addition

- Pour additionner (ou soustraire) deux nombres relatifs en écritures fractionnaires de **même dénominateur**, on additionne (ou soustrait) les **numérateurs** et on conserve le **dénominateur commun**.

C'est-à-dire : si a , b , c sont des nombres relatifs avec $c \neq 0$ alors

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c} \quad (\text{ou} \quad \frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c})$$

- Pour additionner (ou soustraire) deux nombres relatifs en écritures fractionnaires qui n'ont pas le même dénominateur, on doit d'abord les réduire au même dénominateur.

Exemples

1. $-\frac{3}{4} + \frac{5}{4} =$
2. $\frac{1}{2} - \frac{2}{3} =$

E. Multiplication

Définition 5 : Multiplication de fractions

Pour multiplier deux fractions :

- on multiplie les numérateurs entre eux
- on multiplie les dénominateurs entre eux.

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}, \quad b \neq 0, d \neq 0.$$

On peut simplifier avant d'effectuer les multiplications.

Exemples

Calculer :

$$\frac{3}{10} \times \frac{(-8)}{12} \qquad (-4) \times \frac{6}{5}$$

F. Inverse et division**Définition 6 : Définition**

Pour tout a relatif non nul (c.-à-d. $a \neq 0$), il existe un unique nombre q tel que $a \times q = 1$.

q est appelé inverse de a et est égal à $\frac{1}{a}$.

Propriété 6 : Propriété

Pour tout nombre a relatif non nul : $a \times \frac{1}{a} = 1$

Exemples

$$\left(\frac{4}{9} \times \frac{9}{4}\right) = 1 \quad \text{donc} \quad \frac{9}{4} \text{ est l'inverse de } \frac{4}{9}$$

$$(-5) \times \frac{1}{-5} = 1 \quad \text{donc} \quad \frac{1}{-5} \text{ est l'inverse de } (-5)$$

Propriété 7 : Règle de division

Diviser par un nombre relatif non nul, c'est multiplier par son inverse.
Pour tous nombres a, b, c, d ($b \neq 0, c \neq 0, d \neq 0$), on a

$$\frac{a}{\frac{c}{d}} = a \times \frac{d}{c} \quad \text{et} \quad \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}.$$

Exemples

$$A = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{7}{4}}$$

$$B = \frac{\frac{4}{7}}{8}$$

IV. Puissances

A. Exposant entier positif

Définition 7 : Définition

Soit a un nombre quelconque, et n un entier naturel non nul.
Le produit de n facteurs, tous égaux à a , est appelé **puissance de a d'exposant n** et noté a^n (qui se lit « a exposant n »).
Autrement dit :

$$a^n = \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{n \text{ facteurs}}$$

Exemples

3^4 est le produit de 4 facteurs égaux à 3 : $3^4 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$.

$(-3)^4$ est le produit de 4 facteurs égaux à -3 : $(-3)^4 = (-3) \times (-3) \times (-3) \times (-3) = 81$.

-3^4 est l'opposé du produit de 4 facteurs égaux à 3 : $-3^4 = -3 \times 3 \times 3 \times 3 = -81$.

Cas particuliers :

- Pour tout nombre a :

$$a^0 = 1$$

$$a^1 = a$$

$$a^2 = a \times a \quad (\text{carré de } a)$$

$$a^3 = a \times a \times a \quad (\text{cube de } a)$$

- Pour tout entier naturel n non nul :

$$0^n = 0$$

$$1^n = 1$$

Attention aux parenthèses

$$(-2)^4 = 16 \quad \text{alors que} \quad -2^4 = -16.$$

Dans le second cas, la puissance porte seulement sur 2.

B. Exposant entier négatif

Propriété 8 : Puissance à exposant entier négatif

Pour tout nombre non nul a et tout entier naturel non nul n :

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \text{ et } a^n = \frac{1}{a^{-n}}.$$

En particulier :

$$a^{-1} = \frac{1}{a}, \text{ c'est une autre notation pour l'inverse de } a.$$

Exemple

2^{-3} est l'inverse de 2^3 , donc $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$,

$$10^{-2} = \frac{1}{10^2} = \frac{1}{100}.$$

C. Puissances de 10 et notation scientifique

[Les définitions sont les mêmes lorsque $a = 10$]

$$10^n = \underbrace{10 \times 10 \times \dots \times 10}_{n \text{ facteurs}} = 1 \underbrace{00 \dots 0}_{n \text{ zéros}}$$

$$10^{-n} = \frac{1}{10^n} = \underbrace{0,0000 \dots 01}_{\substack{n \text{ chiffres après la virgule} \\ n \text{ zéros en tout}}}$$

Exemples

$$10^5 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 100\,000$$

$$10^3 = \frac{1}{10^3} = \frac{1}{1000} = 0,001$$

Définition 8 : Définition

La notation scientifique d'un nombre réel non nul est son unique écriture de la forme $a \times 10^n$, où :

- a est un nombre ayant un seul chiffre avant la virgule ($\neq 0$)
- n est un entier relatif

Exemples

$$23\,500 = 235 \times 10^2 = 23,5 \times 10^3 = 2,35 \times 10^4 \text{ est l'écriture scientifique.}$$

$$0,0087 = 87 \times 10^{-4} = 8,7 \times 10^{-3} \text{ est l'écriture scientifique.}$$

$$-1995 = -199,5 \times 10 = -19,95 \times 10^2 = -1,995 \times 10^3 \text{ est l'écriture scientifique.}$$

D. Propriétés des puissances

Propriété 9 : Propriétés

Pour tous réels non nuls a et b , et pour tous entiers relatifs m et n :

$$a^m \times a^n = a^{m+n},$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n},$$

$$(a^m)^n = a^{mn},$$

$$(ab)^n = a^n b^n,$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}.$$

Remarque

Pour utiliser les propriétés des puissances, il faut être attentif à la base : les règles

$$a^m \times a^n = a^{m+n} \quad \text{et} \quad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

s'appliquent lorsque la base est la même.

Exemples

$$2^3 \times 2^4 = 2^{3+4} = 2^7$$

$$10^7 \times 10^{-9} = 10^{7+(-9)} = 10^{-2}$$

$$\frac{7^4}{7^3} = 7^{4-3} = 7^1 = 7$$

$$\frac{10^5}{10^3} = 10^{5-3} = 10^2$$

$$\frac{3^2}{3^5} = 3^{2-5} = 3^{-3} = \frac{1}{3^3}$$

$$\frac{10^3}{10^5} = 10^{3-5} = 10^{-2}$$

$$[(-8)^2]^5 = (-8)^{2 \times 5} = (-8)^{10}$$

$$(3 \times 2)^2 = 3^2 \times 2^2 = 9 \times 4$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1^5}{2^5} = \frac{1}{32}$$