

Probabilités

« Le nom seul de calcul des probabilités est un paradoxe : la probabilité, opposée à la certitude, c'est ce qu'on ne sait pas, et comment peut-on calculer ce que l'on ne connaît pas ? »

Henri Poincaré - La Science et l'hypothèse (1908)

I. Vocabulaires

A. Issues d'une expérience aléatoire

Définition

Une **expérience** est dite « **aléatoire** » lorsqu'elle vérifie trois conditions :

- on connaît tous les résultats ou **issues** possibles ;
- on ne peut pas prévoir avec certitude quelle issue se produira. Les issues sont uniquement dues au **hasard** ;
- on peut reproduire plusieurs fois l'expérience dans les mêmes conditions.

Exemple 1 : La pièce de monnaie

On lance une pièce de monnaie équilibrée et on regarde la face obtenue.



Issues de l'expérience

L'expérience à deux issues possibles : Pile et Face.

Exemple 2 : La roue

On considère cette roue bien équilibrée. On relève le numéro qui s'arrête en face du repère rouge.



Issues de l'expérience

L'expérience à cinq issues possibles : 1, 2, 3, 4 et 5.

Exemple 3 : Le dé

On lance un dé équilibré à six faces. On lit le numéro inscrit sur la face supérieure.



Issues de l'expérience

L'expérience à six issues possibles : 1, 2, 3, 4, 5 et 6.

B. Notion d'événement

Définition

Un **événement** est un ensemble formé d'une ou plusieurs issues relatives à une même expérience aléatoire. On dit que chacune de ces issues réalise l'événement.

Exemple

Expérience aléatoire - lancé d'un dé à 6 faces.

Événement E : " Obtenir un nombre strictement plus petit que 3 ".

Définitions

Evénements particuliers

- Un événement réalisé par une seule issue est appelé **événement élémentaire**.
- Deux événements aléatoires sont dits **incompatibles** s'ils ne peuvent être réalisés en même temps.
- Un événement qui ne peut se produire est dit **événement impossible**.
- Un événement qui se produit nécessairement est dit **événement certain**.
- Etant donné un événement aléatoire A, l'événement aléatoire correspondant à « A n'est pas réalisé » est appelé **événement contraire** de l'événement A et noté \bar{A} .
- Pour tous événements aléatoires A et B, l'événement aléatoire « l'événement A ou l'événement B (éventuellement les deux) est réalisé » est noté **A ou B**.

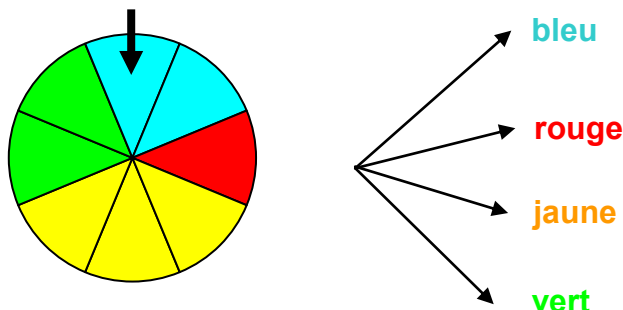
II. Notion de probabilité

A. Arbre des possibilités

L'arbre des possibilités (ou « arbre de choix » ou « arbre de probabilité ») permet de visualiser les issues d'une expérience aléatoire.

Exemple

Lorsqu'on fait tourner la roue, quatre issues sont possibles. On le schématise sur l'arbre des possibilités :

**B. Probabilité****Définition**

La **probabilité** d'un événement aléatoire A , notée $p(A)$, est un nombre qui « mesure la chance » qu'il a de se produire.

Exemple

1. On remarque que 2 secteurs sur 8 sont de couleur bleue. Lors d'une expérience aléatoire, il y a donc 2 chances sur 8 d'obtenir un secteur de couleur bleue.

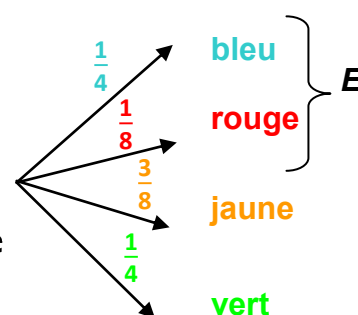
On dit que la probabilité d'obtenir un secteur bleu est égale à $\frac{2}{8}$, soit $\frac{1}{4}$.

On inscrit sur l'arbre des possibles les probabilités des différentes issues.

2. Soit l'évènement E « La roue s'arrête sur un secteur bleu ou rouge ».

On dit que la probabilité que l'évènement E se réalise est égale à $\frac{3}{8}$ ($= \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$).

On note : $P(E) = P(B) + P(R) = \frac{3}{8}$.

**C. Propriétés****Propriétés**

- Une probabilité est un nombre compris entre 0 et 1, c'-à-d $0 \leq p(A) \leq 1$.
- La probabilité d'un événement impossible est égale à 0.

- La probabilité d'un événement certain est égale à 1.
- Etant donné un événement aléatoire A et son événement contraire \bar{A} :

$$p(\bar{A}) = 1 - p(A).$$
- Si deux événements aléatoires A et B sont incompatibles alors

$$p(A \text{ ou } B) = p(A) + p(B).$$
- Si une expérience aléatoire admet un nombre fini d'issues, alors la somme des probabilités des événements élémentaires est égale à 1.

Exemple : La pièce de monnaie.

Soient l'événement P : « on obtient le côté pile » et l'événement F : « on obtient le côté face ».

- L'événement P ou F « On obtient le côté pile ou le côté face » est un événement certain. On a $P(P \text{ ou } F) = 1$.
- L'événement P et F « On obtient le côté pile et le côté face » est un événement impossible. On a $P(P \text{ et } F) = 0$. Les événements P et F sont incompatibles et contraires. On a donc : $P(P) + P(F) = 1$.

D. Equiprobabilité

Définition

Lorsque tous les événements élémentaires dans une expérience aléatoire ont la même probabilité d'être réalisés, on dit qu'il s'agit d'une situation d'**équiprobabilité**.

Dans une situation d'équiprobabilité, tous les événements élémentaires ont la même probabilité.

Propriétés

On désigne par n le nombre fini d'issues possibles d'une expérience aléatoire.

Dans une situation d'**équiprobabilité** :

- La probabilité d'un événement élémentaire est égale à $\frac{1}{n}$.
- Pour tout événement aléatoire A correspondant à m issues possibles, on a :

$$p(A) = \frac{\text{nombre d'issues réalisant A}}{\text{nombre total d'issues possibles}} = \frac{m}{n}.$$

Exemple : La pièce de monnaie.

On a autant de chance d'obtenir le côté pile que le côté face ; il s'agit d'une situation d'équiprobabilité.

On a $P(F) = P(P) = \frac{1}{2}$.

Remarque

Le nombre d'issues d'une expérience aléatoire peut être infini (ex : choisir au hasard un point sur une ligne ou sur une surface).

En situation d'équiprobabilité, on raisonnera généralement par *proportionnalité* :

$$p(A) = \frac{\text{longueur de la ligne représentée par A}}{\text{longueur totale}} \quad \text{ou} \quad p(A) = \frac{\text{aire de la surface représentée par A}}{\text{aire totale}} .$$

III. Probabilité et fréquence

Pour une expérience répétée un grand nombre de fois, la fréquence d'apparition d'une valeur se rapproche de sa probabilité avec le temps. Ce phénomène est connu sous l'appellation de " loi des grands nombres ".

Exemple

On lance 20 fois de suite un dé à 6 faces, on obtient le tableau suivant.

Chiffre obtenu	1	2	3	4	5	6
Effectif	3	0	5	3	4	5
Fréquence	0,15	0	0,25	0,15	0,2	0,25

On fait 80 lancers supplémentaires. On obtient le tableau suivant.

Chiffre obtenu	1	2	3	4	5	6
Effectif	18	11	21	16	17	17
Fréquence	0,18	0,11	0,21	0,16	0,17	0,17

Puis on fait encore 400 lancers supplémentaires. On obtient le tableau suivant.

Chiffre obtenu	1	2	3	4	5	6
Effectif	78	76	88	84	85	89
Fréquence	0,156	0,152	0,176	0,168	0,17	0,178

On constate que les fréquences d'apparition de chaque valeur se rapprochent de leur probabilités qui font toutes un sixième soit environ 0,167.

IV. Exemple d'expérience aléatoire à deux épreuves

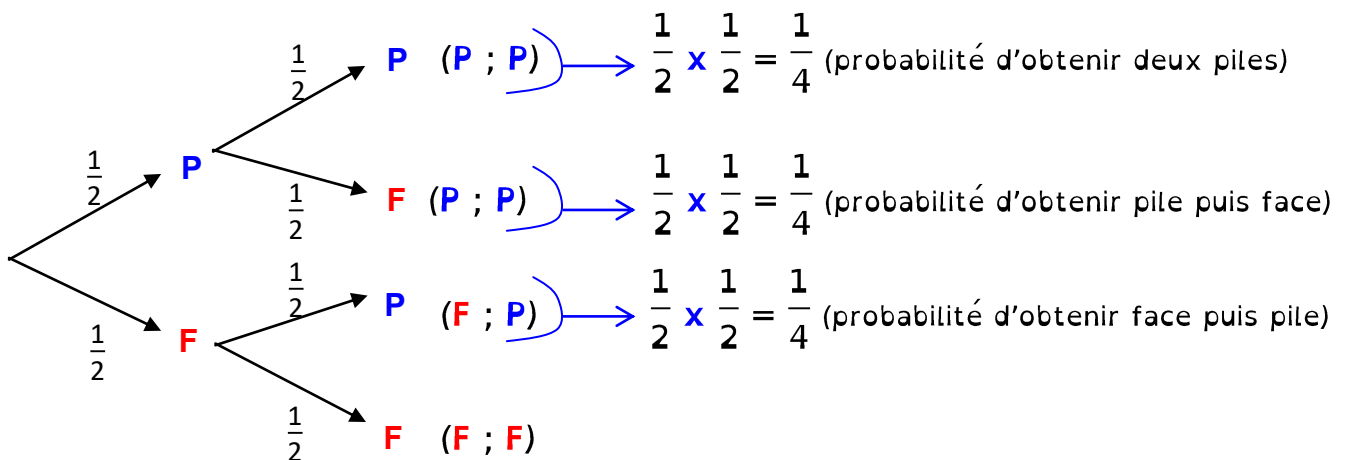
Lancer deux fois de suite une pièce de monnaie est une expérience aléatoire à deux épreuves.

Soit E l'évènement : « On obtient au moins une fois la face PILE. »

On peut représenter une telle expérience par un arbre de choix.

Chaque résultat de l'expérience est représenté par un chemin qui suit les « branches » de l'arbre.

A chaque nœud de branches correspond une issue de l'expérience et chaque branche est pondérée par la probabilité correspondante à cette issue.



Propriété

Dans un arbre, la probabilité du résultat auquel conduit un chemin est égale au produit des probabilités rencontrées le long de ce chemin.

La probabilité que l'évènement E se réalise est de $\frac{3}{4}$: $P(E) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.

Il y a donc trois chances sur quatre d'obtenir au moins une fois la face PILE lorsqu'on lance deux fois de suite une pièce de monnaie.

V. Exemples

Expérience 1 : jet d'un dé à 6 faces

1. Combien y a-t-il d'issues possibles ? **6**

Quelles sont-elles ? **1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6**

2. Expliciter les événements aléatoires suivants :

- A : « Sortir un nombre pair » : 2 ; 4 ; 6
- B : « Sortir un multiple de 3 » : 3 ; 6
- C : « Sortir un nombre supérieur à 2 » : 3 ; 4 ; 5 ; 6

3. Décrire un événement impossible : « Sortir 0 », « Sortir 7 », ...

4. Décrire un événement certain : « Sortir un nombre inférieur ou égal à 6 », « Sortir un diviseur de 60 », ...

5. Décrire et expliciter les événements aléatoires suivants :

- \bar{A} : « Sortir un nombre impair » : 1 ; 3 ; 5
- \bar{B} : « Sortir un nombre qui ne soit pas un multiple de 3 » : 1 ; 2 ; 4 ; 5
- \bar{C} : « Sortir un nombre inférieur ou égal à 2 » : 1 ; 2
- A ou B : « Sortir un nombre pair ou multiple de 3 » : 2 ; 3 ; 4 ; 6
- $\overline{A \text{ ou } B}$: « Sortir un nombre impair et non multiple de 3 » : 1 ; 5

6. Y a-t-il équiprobabilité ? **oui**

Donner la probabilité de chaque événement élémentaire :

Événement élémentaire	1	2	3	4	5	6
Probabilité	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

7. Calculer (on essaiera au maximum d'utiliser les propriétés du cours) :

- $p(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$
- $p(\bar{A}) = 1 - p(A) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$
- $p(A \text{ ou } B) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$
- $p(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$
- $p(\bar{B}) = 1 - p(B) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$
- $p(C) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$
- $p(\bar{C}) = 1 - p(C) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$

Comparer avec $p(A) + p(B) = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{5}{6}$

Conclusion : $p(A \text{ ou } B) \neq p(A) + p(B)$, car A et B ne sont pas incompatibles. En effet l'issue « 6 » réalise à la fois A et B

- $p(\overline{A \text{ ou } B}) = 1 - p(A \text{ ou } B) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$

Expérience 2 : tirage d'une carte dans un jeu de 32 cartes

1. Combien y a-t-il d'issues possibles ? **32**

Quelles sont-elles ? **Chacune des 32 cartes du jeu**

2. Expliciter les événements aléatoires suivants (on notera P pour pique, C pour cœur, K pour carreau, T pour trèfle) :

- A : « Tirer un pique » : **7P, 8P, 9P, 10P, VP, DP, RP, AP**
- B : « Tirer une figure » : **VP, DP, RP, VC, DC, RC, VK, DK, RK, VT, DT, RT,**

3. Y a-t-il équiprobabilité ? **oui**

Donner la probabilité de chaque événement élémentaire : **Chaque événement élémentaire a pour probabilité $\frac{1}{32}$**

4. Calculer : $p(A) = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$ $p(B) = \frac{12}{32} = \frac{3}{8}$

Expérience 3 : Sur 12 boules, on inscrit les lettres du mot millefeuille, de façon à ce que deux boules qui portent la même lettre soient indiscernables. On met les boules dans une urne, et on tire une boule au hasard.

1. Combien y a-t-il d'issues possibles ? **6**

Quelles sont-elles ? **M, I, L, E, F, U**

2. Expliciter les événements aléatoires suivants :

- A : « Sortir une voyelle » : **I, E, U**
- B : « Sortir une lettre du mot mille » : **M, I, L, E**
- C : « Sortir une lettre du mot feuille » : **F, E, U, I, L**

3. Décrire et expliciter les événements aléatoires suivants :

- \bar{A} : « Sortir une consonne » : **M, L, F**
- \bar{B} : « Sortir une lettre qui n'appartient pas au mot mille » : **F, U**
- \bar{C} : « Sortir une lettre qui n'appartient pas au mot feuille » : **M**
- A ou B : « Sortir une voyelle ou une lettre du mot mille » : **I, E, U, M, L**
- B ou C : « Sortir une lettre du mot mille ou une lettre du mot feuille » : **M, I, L, E, F, U**

4. Y a-t-il équiprobabilité ? **non**

Donner la probabilité de chaque événement élémentaire :

Événement élémentaire	M	I	L	E	F	U
Probabilité	$\frac{1}{12}$	$\frac{2}{12} = \frac{1}{6}$	$\frac{4}{12} = \frac{1}{3}$	$\frac{3}{12} = \frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$

5. Calculer :

$$\begin{aligned}
 & \bullet p(A) = \frac{2}{12} + \frac{3}{12} + \frac{1}{12} = \frac{1}{2} & \bullet p(B) = \frac{1}{12} + \frac{2}{12} + \frac{4}{12} + \frac{3}{12} = \frac{5}{6} & \bullet p(C) = \frac{1}{12} + \frac{3}{12} + \frac{1}{12} + \frac{2}{12} + \frac{4}{12} = \frac{11}{12} \\
 & \bullet p(\bar{A}) = 1 - p(A) & \bullet p(\bar{B}) = 1 - p(B) & \bullet p(\bar{C}) = 1 - p(C) \\
 & \quad = 1 - \frac{1}{2} & \quad = 1 - \frac{5}{6} & \quad = 1 - \frac{11}{12}
 \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \qquad = \frac{1}{6} \qquad = \frac{1}{12}$$

$$\bullet p(A \text{ ou } B) = \frac{2}{12} + \frac{3}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{4}{12} = \frac{11}{12}$$

$$\text{Comparer avec } p(A) + p(B) = \frac{6}{12} + \frac{10}{12} = \frac{16}{12}$$

Conclusion : $p(A \text{ ou } B) \neq p(A) + p(B)$, car A et B ne sont pas incompatibles.

En effet les issues « I » et « E » réalisent à la fois A et B

$$\bullet p(B \text{ ou } C) = \frac{12}{12} = 1 : B \text{ ou } C \text{ est un événement certain}$$

$$\text{Comparer avec } p(B) + p(C) = \frac{10}{12} + \frac{11}{12} = \frac{21}{12}$$

Conclusion : $p(B \text{ ou } C) \neq p(B) + p(C)$, car B et C ne sont pas incompatibles.

Expérience 4 : On fait tourner une roue de loterie équilibrée, couleur de la case désignée par la flèche.

1. Combien y a-t-il d'issues possibles ? **4**

Quelles sont-elles ? **Bleu, Jaune, Noir, Rouge**

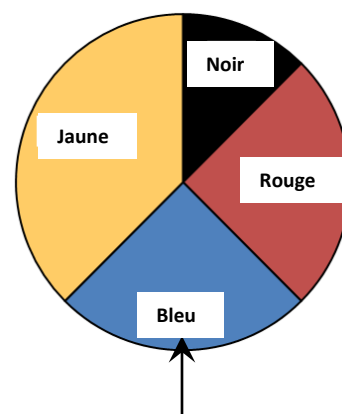
2. Décrire un événement impossible :

« **Tomber sur une case verte** »

3. Y a-t-il équiprobabilité ? **Non**

Donner la probabilité de chaque événement élémentaire :

Événement élémentaire	Bleu	Jaune	Noir	Rouge
Probabilité	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$



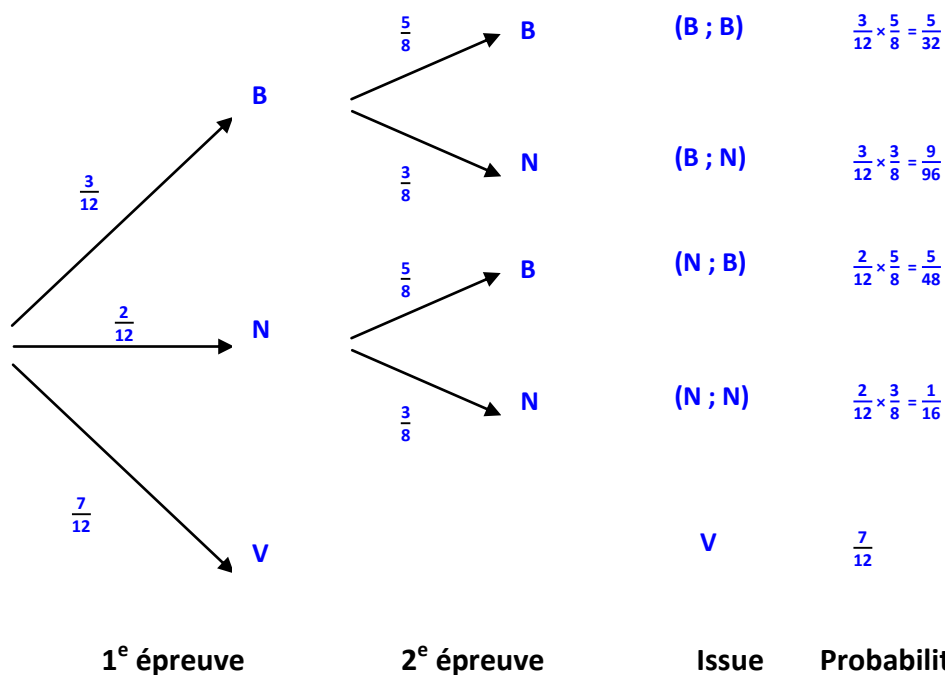
Expérience 5 :

Un jeu consiste à choisir successivement parmi deux séries distinctes deux boîtes au hasard.

- La première série se constitue de 12 boîtes parmi lesquelles 7 sont vides, 3 contiennent une boule blanche, et 2 contiennent une boule noire.
- La deuxième série se constitue de 8 boîtes parmi lesquelles 5 contiennent une boule blanche, et 3 contiennent une boule noire.

On gagne si l'on choisit deux boîtes contenant des boules de même couleur.

Quelle est la probabilité de gagner à ce jeu ?



En notant **B** pour le choix d'une boîte contenant une boule blanche, **N** pour le choix de la boîte contenant une boule noire et **V** pour le choix d'une boîte vide, compléter l'arbre ci-dessus.

Expliciter l'événement **G** « Le joueur gagne » : **(B ; B), (N ; N)**

Calculer sa probabilité : $\frac{5}{32} + \frac{1}{16} = \frac{5}{32} + \frac{2}{32} = \frac{7}{32}$