

Fonction affine

« Ce n'est pas suffisant d'avoir un bon esprit ;
l'essentiel c'est bien l'utiliser. »

René Descartes

I. Définition

Définition

Soit a et b des nombres fixés.

La fonction $f: x \mapsto ax + b$ est une **fonction affine**.

Exemples

1. Soit la fonction affine $f: x \mapsto 2x + 5$.

Pour tout x , $f(x) = 2x + 5$.

a. Calculer les images de 5 ; -6 ; 0 .

$$f(5) = 2 \times 5 + 5 = 15 \quad f(-6) = 2 \times (-6) + 5 = -7 \quad f(0) = 2 \times 0 + 5 = 5$$

b. Rechercher l'(es) antécédent(s) de 18 .

On cherche x tel que $f(x) = 18$

$$2x + 5 = 18$$

$$2x = 18 - 5$$

$$x = \frac{13}{2}$$

2. Soit la fonction affine $g: x \mapsto -\frac{7}{3}x + 1$.

Pour tout x , $g(x) = -\frac{7}{3}x + 1$.

a. Calculer les images de 5 ; -6 ; 0 .

$$g(5) = -\frac{7}{3} \times 5 + 1 = -\frac{35}{3} + \frac{3}{3} = -\frac{32}{3} \quad ; \quad g(-6) = -\frac{7}{3} \times (-6) + 1 = \frac{7 \times 2 \times 3}{3} + 1 = 15$$

$$g(0) = -\frac{7}{3} \times 0 + 1 = 1$$

b. Rechercher l'(es) antécédent(s) de 18 .

On cherche x tel que $g(x) = 18$

$$-\frac{7}{3}x + 1 = 18$$

$$-\frac{7}{3}x = 18 - 1$$

$$x = -\frac{3}{7} \times 17$$

$$x = -\frac{51}{7}$$

Remarque

Une fonction affine, en général, ne représente pas une situation de proportionnalité.

Cas particuliers

Soit la fonction affine $f: x \mapsto ax + b$

- **Si $b = 0$** : Pour tout x , on a alors $f(x) = ax$: f est une **fonction linéaire**.
Ainsi, une fonction linéaire n'est autre qu'un cas particulier de fonction affine.
- **Si $a = 0$** : Pour tout x , on a alors $f(x) = b$
Ainsi, f prend la même valeur b en tout nombre x .
On dit que f est une fonction **constante**.

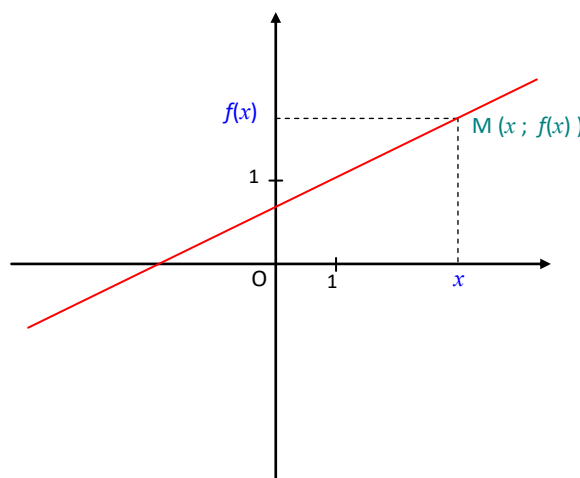
II. Représentation graphique

Propriété

La représentation graphique d'une fonction affine est une **droite non parallèle à l'axe des ordonnées**.

Remarque

Pour représenter graphiquement une fonction affine, il suffit de calculer les coordonnées de deux points.

**Définition**

On dit que (d) a pour **équation** : $y = ax + b$.

Le coefficient « a » est appelé **coefficient directeur** de la droite (d).

Le coefficient « b » est appelé **l'ordonnée à l'origine** de la droite (d).

Propriété**Appartenance d'un point à une droite**

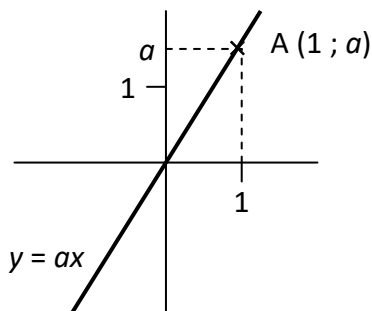
On considère le point $M(x_M; y_M)$ et une droite (d) d'équation : $y = ax + b$.

- Si $M \in (d)$ alors ses coordonnées vérifient : $y_M = a \times x_M + b$.
- Si les coordonnées du point M vérifient : $y_M = a \times x_M + b$ alors $M \in (d)$.

III. Interprétation du coefficient directeur

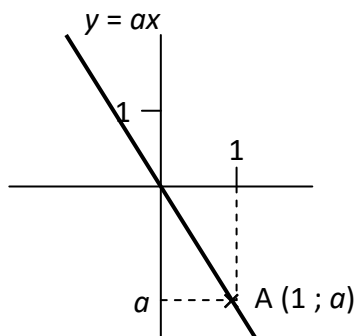
Le coefficient directeur « a », est aussi appelé « **pente** » de la droite, il indique « **l'inclinaison** » de la droite par rapport à l'origine.

Si $a > 0$



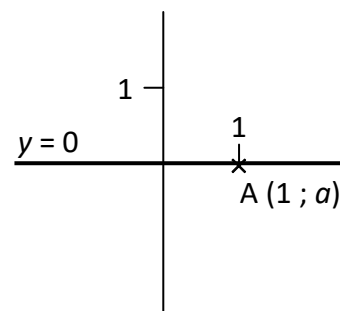
f est une fonction **croissante**

Si $a < 0$



f est une fonction **décroissante**

Si $a = 0$



f est une fonction **constante**

IV. Proportionnalité des accroissements

Propriété

Soit $f: x \mapsto ax + b$ une fonction affine.

- Les **accroissements de x** sont **proportionnels aux accroissements de $f(x)$** , le coefficient de proportionnalité étant égal à a .
- Pour tous x_1, x_2 on a $f(x_2) - f(x_1) = a(x_2 - x_1)$

Accroissement
de $f(x)$

Accroissement de x

d'où si $x_1 \neq x_2$

$$a = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Exemple : calcul des coefficients a et b

f est une fonction affine telle que $f(5) = 9$ et $f(7) = 15$.

Une fonction affine est de la forme $f(x) = ax + b$.

- **étape 1** : calcul du coefficient « a »

$$a = \frac{f(7) - f(5)}{7 - 5} = \frac{15 - 9}{2} = \frac{6}{2} = 3. \text{ On a donc } f(x) = 3x + b.$$

- **étape 2** : calcul du coefficient « b »

On sait que $f(5) = 9$ donc $9 = 3 \times 5 + b$.

D'où $b = 9 - 15 = -6$.

On a donc $f(x) = 3x - 6$.

V. Détermination graphique des coefficients

Exemple 1

On considère la fonction affine f dont la droite (d) est sa représentation graphique.

- **étape 1** : calcul du coefficient « a »

On utilise la « méthode en escalier » pour déterminer le coefficient directeur :

$$a = \frac{\text{déplacement vertical}}{\text{déplacement horizontal}} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

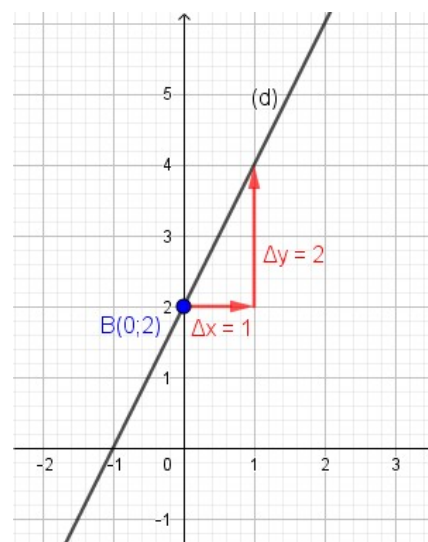
$$a = \frac{+2}{+1}$$

Donc $a = 2$.

- **étape 2** : calcul du coefficient « b »

La droite (d) coupe l'axe des ordonnées au point B(0 ; 2).

L'ordonnée à l'origine de cette droite est $b = 2$.



La droite (d) a donc pour équation $y = 2x + 2$.

Exemple 2

On considère la fonction affine g dont la droite (d) est sa représentation graphique.

La droite (d) passe par les points A(-1;-1) et B(4;2).

- **étape 1** : calcul du coefficient « a »

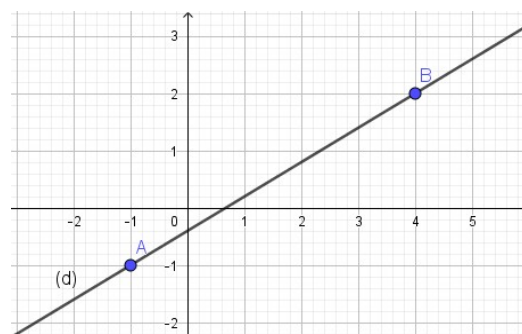
$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{2 - (-1)}{4 - (-1)} = \frac{2+1}{4+1} = \frac{3}{5}$$

On a donc $f(x) = \frac{3}{5}x + b$.

- **étape 2** : calcul du coefficient « b »

Le point A ∈ (d) donc ses coordonnées vérifient l'équation donc $-1 = \frac{3}{5} \times (-1) + b$

$$b = -1 + \frac{3}{5} = -\frac{5}{5} + \frac{3}{5} = -\frac{2}{5}$$



La droite (d) a donc pour équation $y = \frac{3}{5}x - \frac{2}{5}$.