

Equations et Inéquations

$$Ego = \frac{1}{Knowledge}$$

« More the Knowledge... Lesser the Ego..., Lesser the Knowledge...
More the Ego... »

Albert Einstein

I. Définitions

Définitions

- Une **équation (inéquation)** est une égalité (inégalité) comportant une valeur variable (représentée par une lettre) appelée **inconnue**.
- Un nombre qui, remplaçant l'inconnue, rend l'égalité vraie est une **solution** de l'équation.
- **Résoudre** l'équation (l'inéquation), c'est trouver toutes les solutions s'il y en a, ou, le cas échéant, prouver qu'il n'y en a aucune.

Exemples

$$6x - 5 = 9x + 11 \rightarrow \text{Équation d'inconnue } x$$

$$4a + 5 = a + 3 \rightarrow \text{Équation d'inconnue } a$$

$$3x + 3 \leq 4 \rightarrow \text{Inéquation d'inconnue } x$$

Remarques

- Une équation peut admettre une unique solution, ou plusieurs (voire une infinité), ou encore aucune.
- Une équation peut comporter plusieurs inconnues.

II. Equations du premier degré à une inconnue

Définition

Le **degré** d'une équation à une inconnue x , est l'exposant le plus élevé de x (après développement et réduction)

Exemples

- $2x^2 - x = 12$ est du second degré (degré 2) car il y a x^2
- $(2x + 3)(5x - 1) = 12$ est du second degré car après développement on obtient $10x^2 + 13x - 3 = 12$
- $(3x - 2)^2 = 9x^2$ est du 1er degré malgré les apparences

Propriétés fondamentales (rappel)

Pour tous nombres a, b, c

- Si $a = b$ alors $a + c = b + c$
Une égalité est conservée si l'on ajoute un même nombre à ses deux membres.
- Si $a = b$ alors $ac = bc$
Une égalité est conservée si l'on multiplie ses deux membres par un même nombre.

Définition

Le degré d'une équation à une inconnue x , est l'exposant le plus élevé de x (après développement et réduction)

Remarques

Toutes les équations de degré 1 se résolvent grâce aux propriétés fondamentales.

Méthode de résolution

Résoudre l'équation $4(2x - 5) = 2 + 10(x - 2)$

1. On peut **développer et réduire** chaque membre.

$$\begin{aligned} 4(2x - 5) &= 2 + 10(x - 2) \\ 8x - 20 &= 2 + 10x - 20 \\ 8x - 20 &= -18 + 10x \end{aligned}$$

2. On peut **regrouper les termes** en x dans un membre et les nombres connus dans l'autre.

$$\begin{aligned} 8x - 10x &= -18 + 20 \\ -2x &= 2 \end{aligned}$$

3. Il reste à **diviser les 2 membres** par un même nombre (ici -2).

$$\begin{aligned} \frac{-2x}{-2} &= \frac{2}{-2} \\ x &= -1 \end{aligned}$$

4. Il faut **vérifier** dans l'équation de départ.

$$4(2 \times (-1) - 5) = 2 + 10(-1 - 2)$$

$$4(-7) = 2 + 10(-3)$$

$$-28 = -28$$

5. Pour terminer il faut **conclure**

La solution est **-1**

III. Inéquations du premier degré à une inconnue

Propriétés fondamentales

Pour tous nombres a, b, c

- Si $a \leq b$ alors $a + c \leq b + c$

Une inégalité est conservée si l'on ajoute un même nombre à ses deux membres.

- Si $a \leq b$ et $c > 0$ alors $ac \leq bc$

Une inégalité est **conservée** si l'on **multiplie** ses deux membres par un même nombre **positif**.

Si $a \leq b$ et $c < 0$ alors $ac \geq bc$

Une inégalité **change de sens** si l'on **multiplie** ses deux membres par un même nombre **négatif**.

Exemple 1

Résoudre l'inéquation $2(x + 1) - 5x \geq 5 - (x - 2)$

$$2(x + 1) - 5x \geq 5 - (x - 2)$$

$$2x + 2 - 5x \geq 5 - x + 2$$

$$-3x + 2 + x - 2 \geq 7 - x + x - 2 \text{ d'après la propriété}$$

$$-2x \geq 5$$

$$-2x \times \left(-\frac{1}{2}\right) \leq 5 \times \left(-\frac{1}{2}\right) \quad \text{d'après la propriété avec } -\frac{1}{2} < 0$$

$$x \leq -\frac{5}{2}$$

Les solutions de l'inéquation sont les nombres **inférieurs ou égaux** à $-\frac{5}{2}$.

Représentation graphique de l'ensemble des solutions :



Remarque

Le crochet **fermé** (c.-à-d. tourné vers l'ensemble des solutions) indique que $-\frac{5}{2}$ appartient à l'ensemble.

Exemple 2

Résoudre l'inéquation $-\frac{2}{3}\left(x - \frac{9}{2}\right) - 7 > -5x + 1 - (2 - 4x)$

$$-\frac{2}{3}\left(x - \frac{9}{2}\right) - 7 > -5x + 1 - (2 - 4x)$$

$$-\frac{2}{3}x + 3 - 7 > -5x + 1 - 2 + 4x$$

$$-\frac{2}{3}x - 4 > -x - 1$$

$$-\frac{2}{3}x - 4 + x + 4 > -x - 1 + x + 4 \quad \text{d'après la propriété}$$

$$-\frac{2}{3}x + \frac{3}{3}x > 3$$

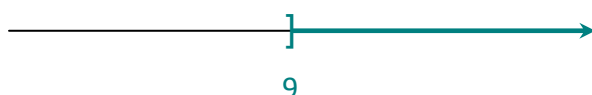
$$\frac{1}{3}x > 3$$

$$\frac{1}{3}x \times 3 > 3 \times 3 \quad \text{d'après la propriété avec } 3 > 0$$

$$x > 9$$

Les solutions de l'inéquation sont les nombres **strictement supérieurs** à 9.

Représentation graphique de l'ensemble des solutions :

**Remarque**

Le crochet **ouvert** (c.-à-d. « tournant le dos » à l'ensemble des solutions) indique que 9 n'appartient pas à l'ensemble.

IV. Equations à produit nul

A. Propriétés

Propriété

Dans un produit, si un facteur est nul alors ce produit est nul.

Exemple

$$3 \times (-4)^2 \times 2009 \times (2 - x) \times 0 \times (10 - 12) = 0$$

Réciproquement**Propriété**

Si un produit est nul, alors au moins l'un des facteurs est nul.

B. Méthode de résolution

Résoudre l'équation $x(2x + 3)(x - 1) = 0$

C'est une équation produit nul.

Propriété : Un produit de facteurs est nul si au moins l'un des facteurs est nul.

$$x = 0 \quad \text{ou} \quad 2x + 3 = 0 \quad \text{ou} \quad x - 1 = 0$$

$$2x = -3 \quad x = 1$$

$$x = \frac{-3}{2}$$

Il y a trois solutions : 0, $-\frac{3}{2}$ et 1 (on peut les vérifier dans l'équation de départ).

Exemple

Résoudre l'équation $3(x - 2)^2 + (x - 2)(2x + 3) = 0$

$$3(x - 2)^2 + (x - 2)(2x + 3) = 0$$

$$(x - 2)[3(x - 2) + (2x + 3)] = 0$$

$$(x - 2)(5x - 3) = 0$$

On a une équation produit nul.

Or, Un produit de facteurs est nul si l'un des facteurs au moins est nul

$$x - 2 = 0 \quad \text{ou} \quad 5x - 3 = 0$$

$$x = 2 \quad \text{ou} \quad 5x = 3$$

$$x = 2 \quad \text{ou} \quad x = \frac{3}{5}$$

L'équation admet deux solutions : 2 et $\frac{3}{5}$.

C. Un cas particulier : l'équation $x^2 = a$

Propriété

Soit a un nombre.

- Si $a > 0$, l'équation $x^2 = a$ admet deux solutions : $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$
- Si $a = 0$, l'équation $x^2 = a$ admet une seule solution : 0
- Si $a < 0$, l'équation $x^2 = a$ n'admet aucune solution.

Démonstration

Soit a un nombre. On cherche à résoudre l'équation $x^2 = a$.

• Cas 1 : $a > 0$

- On admet qu'il existait au moins un nombre r tel que $r^2 = a$.
- Quel que soit le signe de r, on a $(-r)^2 = r^2 = a$.

Ainsi l'équation $x^2 = a$ admet au moins deux solutions : r et -r.

Comme $a \neq 0$, on a $r \neq 0$ (sinon $r^2 = a = 0$)

On en déduit que, de r et $-r$, l'un est strictement positif, et l'autre strictement négatif.

- On admet que ces deux nombres étaient les seuls à vérifier $x^2 = a$, et celui des deux qui est positif a été noté $\sqrt{a}$. On a donc $(\sqrt{a})^2 = a$, avec $\sqrt{a} > 0$.

On peut désormais démontrer que $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$ sont les seules solutions de l'équation $x^2 = a$:

$$\begin{aligned} & x^2 = a \\ & \text{équivalent à } x^2 - a = 0 \\ & \text{" } x^2 - (\sqrt{a})^2 = 0 \\ & \text{" } (x - \sqrt{a})(x + \sqrt{a}) = 0 \quad (1) \end{aligned}$$

Or si un produit est nul alors l'un de ses facteurs est nul et réciproquement.

$$\begin{aligned} (1) \text{ équivaut donc à } & x - \sqrt{a} = 0 \quad \text{ou} \quad x + \sqrt{a} = 0 \\ \text{équivalent à } & x = \sqrt{a} \quad \text{ou} \quad x = -\sqrt{a} \end{aligned}$$

Ainsi, l'équation $x^2 = a$ admet exactement deux solutions : $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$

- Cas 2 : $a = 0$

L'équation $x^2 = a$ s'écrit $x^2 = 0$

$$x \times x = 0$$

équivalent à $x = 0$ ou $x = 0$

c'est-à-dire $x = 0$

- Cas 3 : $a < 0$

Pour tout nombre x , on a $x^2 \geq 0$.

On en déduit que si $a < 0$, l'équation $x^2 = a$ n'admet aucune solution.

Exemples

- Résoudre l'équation $x^2 = -4$. Comme $-4 < 0$ alors l'équation n'a pas de solution.
- Résoudre l'équation $x^2 = 9$. Comme $9 > 0$ l'équation a deux solutions : 3 et -3.
- Résoudre l'équation $x^2 = 6$. Comme $6 > 0$ l'équation a deux solutions : $\sqrt{6}$ et $-\sqrt{6}$.