Calcul numérique

« Toute chose est nombre »

Pythagore

I. Priorités opératoires

Convention

Les règles de priorité sont :

1. les calculs contenus **entre parenthèses** (ou **crochets**) sont prioritaires sur les calculs situés en dehors de ces parenthèses. La barre d'une fraction ou d'une racine carrée joue le rôle d'une parenthèse ;
2. les **exposants** sont prioritaires sur les multiplications, divisions, additions et soustractions ;
3. les **multiplications et divisions** sont prioritaires sur les additions et soustractions.

Exemples

Calcul de $A = 15 - 2 \times 4^2$

$A = 15 - 2 \times 16$
$A = 15 - 32$
$A = -17$

Calcul de $B = (7 + 2^3) \times 3$

$B = (7 + 8) \times 3$
$B = 15 \times 3$
$B = 45$

II. Nombres relatifs

A. Opposé

Définition

L'**opposé** d'un nombre relatif a est noté $-a$

Remarque

L'écriture $-a$ ne désigne pas nécessairement un nombre négatif :

- Si a est *positif*, $-a$ est *négatif*.
- *Si a est négatif*, $-a$ *est positif.*

B. Multiplication

Définition

Multiplication de nombres relatifs

La **multiplication** de deux nombres relatifs *a* et *b* est l'opération dont le résultat, appelé **produit** de *a* et *b*, est le nombre relatif tel que :

- Sa distance à zéro est égale au *produit des distances à zéro de a et b*
- Son signe est déterminé par la **règle des signes :**
  - Le produit de deux nombres de *même signe* est *positif ;*
  - Le produit de deux nombres de *signes contraires* est *négatif.*

+ × + = +
+ × − = −
− × + = −
− × − = +

Exemples

(+4) x (+7) = + (4 x 7) = +28 = 28

(- 2,5) x (- 10) = + (2,5 x 10) = + 25 = 25

(- 4) x (+7) = - (4 x 7) = -28

(- 2,5) x (+10) = - (2,5 x 10) = - 25

Remarques

- En multipliant un nombre par (–1) on obtient son opposé.
- Le carré d'un nombre est toujours positif.

Propriété

Règle des signes généralisée pour les produits littéraux

Un produit de nombres relatifs est

- **de signe** « + » si le nombre de *facteurs de signe* « – » est **pair,**
- **de signe** « – » si le nombre de *facteurs de signe* « – » est **impair.**

Exemple

$A = -20 \times 1{,}25 \times (-5) \times 8 \times (-3{,}7)$
$A = -20 \times 1{,}25 \times 5 \times 8 \times 3{,}7$
$A = -(20 \times 5) \times (1{,}25 \times 8) \times 3{,}7$
$A = -100 \times 10 \times 3{,}7 = -3\,700$

Il y a 3 facteurs négatifs donc le signe sera -
On fait des regroupements

III. Ecriture fractionnaire

A. Ecritures équivalentes

Propriété

On ne change pas la valeur d'un nombre en écriture fractionnaire en multipliant (ou en divisant) son numérateur **ET** son dénominateur par un même nombre relatif non nul.

C'est-à-dire : $\boxed{\dfrac{a}{b} = \dfrac{a \times k}{b \times k} \quad \text{et} \quad \dfrac{a}{b} = \dfrac{a \div k}{b \div k}}$ où a, b, k sont des nombres relatifs

avec $b \neq 0$ et $k \neq 0$.

Exemples

1. Réduire les écritures fractionnaires $\frac{1{,}8}{-4{,}2} = \frac{18}{-42} = \frac{9}{-21} = \frac{3}{-7} = \frac{-3}{7} = -\frac{3}{7}$
2. Comparer $\frac{7}{4}$ et $\frac{5}{3}$.

Remarques

Donner le résultat sous la forme d'une fraction la plus simple possible : «fraction irréductible ».

B. Fraction d'une quantité

Propriété

- Prendre la fraction $\frac{a}{b}$ **de** la quantité numérique c, c'est prendre une quantité égale à $\frac{a}{b} \times c$
- Pour tous nombres a, b, c $(b \neq 0)$ $\frac{a}{b} \times c = \frac{a \times c}{b} = a \times \frac{c}{b}$

Exemple

$\frac{3}{4} \times 24 = \frac{3 \times 24}{4} = 3 \times \frac{24}{4}$ $(= 3 \times 6 = 18)$

Conséquence

Pour tous nombres a et b ($b \neq 0$), $\frac{a}{b} \times b = a$

C. Egalité

Propriété

Egalité des produits en croix

a ,b ,c et d désignent quatre nombres relatifs avec b et d non nuls.

Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ alors $ad = bc$. Réciproquement, Si $ad = bc$ alors $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

Exemple

1. Les fractions $\frac{273}{379}$ et $\frac{147}{203}$ sont-elles égales ?
2. Calculer la valeur du nombre x dans l'expression : $\frac{3}{x} = \frac{4{,}8}{7}$.

D. Addition et soustraction

Règle d'addition :

- Pour <u>additionner</u> (ou <u>soustraire</u>) deux nombres relatifs en écritures fractionnaires **de même dénominateur,** on additionne (ou soustrait) les **numérateurs** et on conserve le **dénominateur commun.**
  C'est à dire : si a, b, c sont des nombres relatifs avec $c \neq 0$ alors $\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$ (ou $\frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}$)
- Pour <u>additionner</u> (ou <u>soustraire</u>) deux nombres relatifs en écritures fractionnaires qui n'ont pas le même dénominateur, on doit d'abord les réduire au même dénominateur.

Exemples

Calculer $-\frac{3}{4} + \frac{5}{4} =$ $\frac{1}{2} - \frac{2}{3} =$

E. Multiplication

Règle de multiplication :

Pour **multiplier** deux nombres relatifs fractionnaires :

- on multiplie les *numérateurs entre eux*
- on multiplie les *dénominateurs entre eux*

Si a, b, c et d sont des nombres relatifs, avec $(b \neq 0$ **et** $d \neq 0)$ alors $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$

Exemples

Calculer : $\frac{3}{10} \times \frac{(-8)}{12} =$

$(-4) \times \frac{6}{5} =$

F. Inverse et division

Propriété et définition

Pour tout a relatif *non nul* (c.-à-d. $a \neq 0$), il existe un unique nombre q tel que $a \times q = 1$

q est appelé **inverse** de a et est égal à $\frac{1}{a}$. Il est caractérisé par l'identité $a \times \frac{1}{a} = 1$

Exemples

$\left(\frac{4}{9} \times \frac{9}{4}\right) = 1$ donc $\frac{9}{4}$ est l'inverse de $\frac{4}{9}$

$(-5) \times \frac{1}{-5} = 1$ donc $\frac{1}{-5}$ est l'inverse de (-5)

Règle de division :

Diviser par un nombre relatif non nul, c'est **multiplier par son inverse.**

Pour tous nombres a, b, c, d $(b \neq 0,\ c \neq 0,\ d \neq 0)$ on a $\frac{a}{\frac{c}{d}} = a \times \frac{d}{c}$ et $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$

Exemples

$A = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{7}{4}} =$

$B = \frac{\frac{4}{7}}{8} =$

IV. Puissance

A. Exposant entier positif

Définition

Soit a un nombre quelconque, et n un entier naturel non nul.

Le produit de n facteurs, tous égaux à a, est appelé **puissance de a d'exposant n** et noté a^n (qui se lit « a exposant n » ou « a puissance n »).

Autrement dit : $a^n = \overbrace{a \times a \times \ldots \times a}^{n \text{ facteurs}}$

Exemples

3^4 est le produit de 4 facteurs égaux à 3 : $3^4 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$.

$(-3)^4$ est le produit de 4 facteurs égaux à -3 : $(-3)^4 = (-3) \times (-3) \times (-3) \times (-3) = 81$.

-3^4 est l'opposé du produit de 4 facteurs égaux à 3 : $-3^4 = -3 \times 3 \times 3 \times 3 = -81$.

Cas particuliers

- Pour tout nombre a :

  $a^0 = 1$

  $a^1 = a$

  $a^2 = a \times a$ (**carré** de a)

  $a^3 = a \times a \times a$ (**cube** de a)

- Pour tout entier naturel n non nul

  $0^n = 0$

  $1^n = 1$

B. Exposant entier négatif

Propriété

Pour tout nombre $a \neq 0$, pour tout entier **relatif** n

$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ et $a^n = \frac{1}{a^{-n}}$

En particulier $a^{-1} = \frac{1}{a}$: c'est une autre notation pour **l'inverse de a**

Exemple

2^{-3} est l'inverse de 2^3, donc $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{2\times2\times2} = \frac{1}{8}$

C. Puissance de 10 et Notation scientifique

Les définitions sont les mêmes lorsque $a = 10$

$$10^n = \underbrace{10 \, x \, 10 \, x \, \ldots\ldots\ldots x \, 10}_{n \text{ facteurs}} = 1\,\underbrace{00\ldots\ldots..0}_{n \text{ zéros}}$$

$$10^{-n} = \frac{1}{10^n} = \overbrace{\underbrace{0{,}0000\ldots0}_{n \text{ zéros en tout}}1}^{n \text{ chiffres après la virgule}}$$

Exemples

$10^5 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 100\,000$

$10^3 = \frac{1}{10^3} = \frac{1}{1000} = 0{,}001$

Définition

La **notation scientifique** d'un nombre strictement positif est son unique écriture de la forme $a \times 10^n$, où :

- a est un nombre ayant un seul chiffre avant la virgule ($\neq 0$)
- n est un entier relatif

Exemples

$23\,500 = 235 \times 10^2 = 23{,}5 \times 10^3 = 2{,}35 \times 10^4$ est l'écriture scientifique

$0{,}0087 = 87 \times 10^{-4} = 8{,}7 \times 10^{-3}$ est l'écriture scientifique.

$-1995 = -199{,}5 \times 10 = -19{,}95 \times 10^2 = -1{,}995 \times 10^3$ est l'écriture scientifique.

D. Propriétés des puissances

Pour tout nombre $a \neq 0$, pour tous entiers relatifs m et n

$$\boxed{a^n \times a^m = a^{n+m}}$$

$$\boxed{\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}}$$

$$\boxed{(ab)^n = a^n \times b^n}$$

$$\boxed{\left(\frac{1}{a}\right)^n = \frac{1}{a^n}}$$

$$\boxed{\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}}$$

$$\boxed{(a^m)^n = a^{mn}}$$

Exemples

$2^3 \times 2^4 = 2^{3+4} = 2^7$

$10^7 \times 10^{-9} = 10^{7+(-9)} = 10^{-2}$

$\frac{7^4}{7^3} = 7^{4-3} = 7^1 = 7$

$\frac{10^5}{10^3} = 10^{5-3} = 10^2$

$\frac{3^2}{3^5} = 3^{2-5} = 3^{-3} = \frac{1}{3^3}$

$\frac{10^3}{10^5} = 10^{3-5} = 10^{-2}$

$[(-8)^2]^5 = (-8)^{2\times 5} = (-8)^{10}$

$(3x)^2 = 3^2 \times x^2 = 9x^2$

$\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1^5}{2^5} = \frac{1}{32}$