

Proportionnalité - Pourcentage

I. Définitions

Deux grandeurs sont proportionnelles si l'on peut calculer l'une à partir de l'autre en multipliant ou en divisant toujours par le même nombre.

Exemple de situation de proportionnalité

- La masse de pommes de terre achetées et son prix sont proportionnelles.
Si, par exemple, un 1 kg de pommes de terre coûte 2 euros alors 2 kg coûte 4 euros, 3 kg coûte 6 euros...
On multiplie la masse de pomme de terre par 2 pour trouver son prix.
- Le nombre d'heure de travail et le salaire perçu.
Si, par exemple, une heure de travail est payée 8 euros alors 2 heures sont payées 16 euros et 3 heures sont payées 24 euros.
Il faut multiplier le nombre d'heure de travail par 8 pour trouver la somme gagnée.

II. Tableau de proportionnalité

Pour communiquer des informations sur des grandeurs proportionnelles, il est souvent utile de les présenter sous forme de tableau.

Définition

Un tableau est un tableau de proportionnalité si on passe d'une ligne à l'autre en **multipliant** (ou en divisant) par un nombre, toujours le même.

Ce nombre est appelé **coefficient de proportionnalité**.

exemple

Quantité d'essence (en L)	6	8	10	14
Prix payé (en €)	9	12	15	21

1,5 est le coefficient de proportionnalité.

Dans cet exemple, le coefficient de proportionnalité est le prix d'un litre d'essence.

Remarque

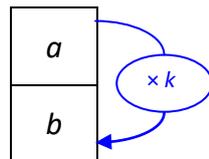
On peut passer de la seconde ligne à la première en divisant par le coefficient.

III. Reconnaître la proportionnalité; calculer le coefficient

Exemple

Une hirondelle se déplace d'un mouvement uniforme en parcourant 63 m en 3 secondes.

A. En utilisant le coefficient de proportionnalité



($a \neq 0$)

Dans le tableau ci-contre, on a $a \times k = b$

Par définition du quotient, $k = \frac{b}{a}$

Remarque

Pour trouver le coefficient de proportionnalité, on fait l'arrivée de la flèche b divisée par le départ a d'où $k = \frac{b}{a}$.

Etapas

- (1) Je construis un tableau.
- (2) Je calcule le coefficient de proportionnalité.
- (3) Je conclus.

Exemple

Durée du vol (en s)	3	4
Distance parcourue (en m)	63	

Le coefficient de proportionnalité est $\frac{63}{3} = 21$.

$$4 \times 21 = 84$$

La distance parcourue en 4 s est 84 m.

B. En additionnant ou soustrayant deux « colonnes » du tableau

Propriété

Dans un tableau de proportionnalité, on peut obtenir une nouvelle colonne en ajoutant dans chaque ligne les valeurs d'autres colonnes.

Etapas

- (1) Je construis un tableau.
- (2) Je repère une addition (ou une soustraction) possible entre deux colonnes.
- (3) Je conclus.

Exemple : Quelle distance parcourt l'hirondelle en 7 secondes ?

Durée du vol (en s)	3	4	7
Distance parcourue (en m)	63	84	

+

On remarque que : $3 + 4 = 7$.

Donc on additionne 63 et 84.

$$63 + 84 = 147$$

La distance parcourue en 7 s est 147 m.

C. En multipliant ou en divisant une « colonne » par un nombre (non nul)

Propriété

Dans un tableau de proportionnalité, on obtient les nombres d'une colonne en multipliant les nombres correspondants d'une autre colonne (s'ils sont non nuls) par un *même nombre*.

Etapas

(1) Je construis un tableau.

(2) Je repère une colonne qui, par multiplication ou division, donne le nombre demandé dans la question.

(3) Je conclus.

Exemple : Quelle distance parcourt l'hirondelle en 15 secondes ?

Durée du vol (en s)	3	4	7	15
Distance parcourue (en m)	63	84	147	

× 5

On remarque que : $3 \times 5 = 15$.

Donc on multiplie 63 par 5.

$$63 \times 5 = 315$$

La distance parcourue en 15 s est 315 m.

IV. Un peu de physique : le mouvement uniforme

Définition

Lorsque la durée d'un parcours effectué par un objet est proportionnelle à la distance parcourue, on dit que le mouvement est uniforme.

Exemple

Pendant un trajet, un routier note les durées et les distances parcourues :

Durée du trajet (en h)	1	1,5	2
Distance parcourue (en km)	80	120	160

Le coefficient de proportionnalité, obtenu en calculant le quotient de la distance parcourue par la durée du parcours, s'appelle la vitesse moyenne.

Ici la vitesse moyenne est de 80 km/h.

V. Echelles

Définition

L'**échelle d'un plan** est le coefficient de proportionnalité entre les distances sur le plan et les distances réelles, exprimées avec la même unité :

$$\text{échelle} = \frac{\text{distance_sur_le_plan}}{\text{distance_réelle}}$$

Exemple

- Sur une carte routière, Marc lit l'échelle suivante : 1 / 25 000.
- 1 cm représente 25 000 cm, c'est-à-dire 250 m dans la réalité.

Marc mesure à la règle la distance du collège St Joseph au Parc des Lilattes. Il a trouvé 3,8 cm. On peut donc dire que 3,8 cm sur la carte représente dans la réalité : $3,8 \times 250 \text{ m} = 950 \text{ m}$.



VI. Proportion, pourcentage

A. Définitions

Définition

La proportion représentée par une quantité a par rapport à une quantité (non-nulle) b est égale au quotient $\frac{a}{b}$.

Exemple

Dans une classe de 25 élèves, 20 sont demi-pensionnaires.

Quelle est la proportion de demi-pensionnaires dans cette classe ?

- La proportion de demi-pensionnaires dans la classe est $\frac{20}{25}$
- $\frac{20}{25} = \frac{4 \times 5}{5 \times 5} = \frac{4}{5}$, donc la proportion peut aussi s'écrire $\frac{4}{5}$
- $\frac{4}{5} = 0,8$, donc la proportion peut aussi s'écrire 0,8
- $\frac{4}{5} = \frac{4 \times 20}{5 \times 20} = \frac{80}{100}$, donc la proportion peut aussi s'écrire $\frac{80}{100}$

Définition

Un pourcentage est une proportion écrite avec le dénominateur 100.

Un pourcentage $\frac{t}{100}$ se note t % et se lit « t pour cent ».

Exemple (suite)

La proportion de demi-pensionnaires dans la classe est 80 % .

B. Application d'un pourcentage (rappel)

Exemple

Un fromage de 160 g contient 23 % de matière grasse.

Quelle est la masse de matière grasse dans ce fromage ?

méthode 1 : tableau de proportionnalité

Masse de fromage (g)	100	160
Masse de matière grasse (g)	23	?



Coefficient de proportionnalité : $\frac{23}{100}$ (l'arrivée 23 est divisée par le départ 100).

méthode 2 : calcul direct

23 % de 160, c'est $\frac{23}{100}$ de 160

c'est $\frac{23}{100} \times 160$

Le fromage contient **36,8 g** de matière grasse.

C. Calculer un pourcentage

1. A l'aide d'un tableau de proportionnalité

Etapas

- (1) Je construis un tableau en imaginant qu'il y a un effectif de 100.
- (2) Je complète le tableau de proportionnalité en utilisant une des 3 méthodes.
- (3) Je conclus.

Exemple

650 candidats se sont présentés à un examen, et 481 ont été reçus.

Quel est le pourcentage de réussite à cet examen ?

Nombre de candidats	650	100
---------------------	-----	-----

Nombre de candidats reçus	481	p
---------------------------	-----	-----

Coefficient de proportionnalité : $\frac{481}{650}$

$$p = \frac{481}{650} \times 100 = 0,74 \times 100 \\ = 74$$

74 % des candidats ont été reçus.

2. A l'aide de fractions

Etapes

- (1) J'écris les données de l'exercice sous forme de fraction (le dénominateur étant le total).
- (2) Je cherche une fraction égale à celle trouvée, avec le dénominateur 100.
- (3) Je conclus.

Exemple

252 élèves d'un collège de 720 élèves font partie de l'association sportive. Quel est le pourcentage d'élèves de ce collège qui font partie de cette association ?

Les élèves qui font partie de l'association dans ce collège représentent $\frac{252}{720}$ des élèves (proportion).

$$\text{Donc } \frac{252}{720} = 0,35 = \frac{35}{100}.$$

Le pourcentage d'élèves qui font partie de l'association sportive est de 35%.