Fonction affine

« Ce n'est pas suffisant d'avoir un bon esprit ;
l'essentiel c'est bien l'utiliser. »

René Descartes

I. Définition

Définition

Soit a et b des nombres fixés.

La fonction $f: x \mapsto ax + b$ est une **fonction affine.**

Exemples

1. *Soit la fonction affine* $f: x \mapsto 2x + 5$.

Pour tout x, f(x) = 2x + 5.

a. *Calculer les images de* 5 ; – 6 ; 0.

f(5) = 2 × 5 + 5 = 15 f(- 6) = 2 × (- 6) + 5 = - 7 f(0) = 2 × 0 + 5 = 5

b. *Rechercher l'(es) antécédent(s) de* 18.

On cherche x tel que f(x) = 18

2x + 5 = 18

2x = 18 - 5

x = $\frac{13}{2}$

2. *Soit la fonction affine* $g: x \mapsto -\frac{7}{3}x + 1$.

Pour tout x, g(x) = $-\frac{7}{3}x + 1$.

a. *Calculer les images de* 5 ; - 6 ; 0.

g(5) = - $\frac{7}{3}$ × 5 + 1 = - $\frac{35}{3}$ + $\frac{3}{3}$ = -$\frac{32}{3}$; g(- 6) = - $\frac{7}{3}$ × (- 6) + 1 = $\frac{7 \times 2 \times 3}{3}$ + 1 = 15

g(0) = - $\frac{7}{3}$ × 0 + 1 = 1

b. *Rechercher l'(es) antécédent(s) de* 18.

On cherche x tel que g(x) = 18

- $\frac{7}{3}$ x + 1 = 18

- $\frac{7}{3}$ x = 18 - 1

x = -$\frac{3}{7}$ × 17

$$x = -\frac{51}{7}$$

Remarque

Une fonction affine, en général, *ne représente pas* une situation de proportionnalité.

Cas particuliers

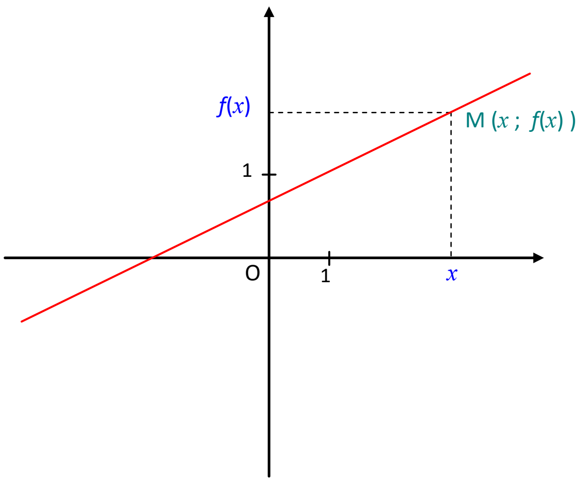
Soit la fonction affine $f : x \mapsto ax + b$

- **Si b = 0** : Pour tout x, on a alors f(x) = ax : f est une **fonction linéaire.**
  Ainsi, une fonction linéaire n'est autre qu'un *cas particulier* de fonction affine.
- **Si a = 0** : Pour tout x, on a alors f(x) = b
  Ainsi, f prend la même valeur b en tout nombre x.
  On dit que f est une fonction **constante.**

II. Représentation graphique

Propriété

La représentation graphique d'une fonction affine est une **droite** *non parallèle à l'axe des ordonnées*.



Remarque

Pour représenter graphiquement une fonction affine, il suffit de calculer les coordonnées de *deux points*.

Définition

On dit que (d) a pour **équation** : $y = a\,x + b$.

Le coefficient « a » est appelé **coefficient directeur** de la droite (d).

Le coefficient « b » est appelé **l'ordonnée à l'origine** de la droite (d).

Propriété

Appartenance d'un point à une droite

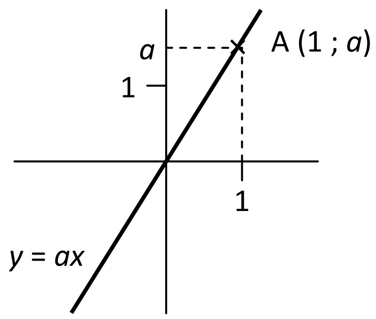
On considère le point M(x_M ; y_M) et une droite (d) d'équation : $y = a\,x + b$.

- Si M (d) alors ses coordonnées vérifient : $y_M = a \times x_M + b$.
- Si les coordonnées du point M vérifient : $y_M = a \times x_M + b$ alors M (d).

III. Interprétation du coefficient directeur

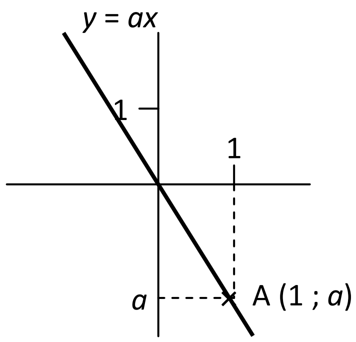
Le coefficient directeur « a », est aussi appelé « **pente** » de la droite, il indique « **l'inclinaison** » de la droite par rapport à l'origine.

<u>*Si a > 0*</u>



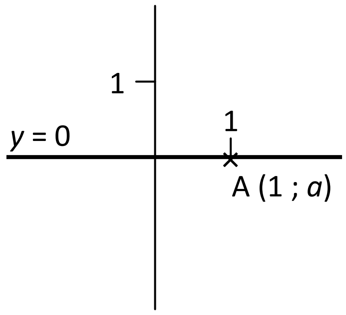
f est une fonction **croissante**

<u>*Si a < 0*</u>



f est une fonction **décroissante**

<u>*Si a = 0*</u>



f est une fonction **constante**

IV. Proportionnalité des accroissements

Propriété

Soit $f : x \mapsto ax + b$ une fonction affine.

- Les **accroissements de** x sont **proportionnels aux accroissements de** f(x), le coefficient de proportionnalité étant égal à a.
- Pour tous x_1, x_2 on a $\underbrace{f(x_2) - f(x_1)}_{\text{Accroissement de } f(x)} = a\ \underbrace{(x_2 - x_1)}_{\text{Accroissement de } x}$

d'où si $x_1 \neq x_2$ $\boxed{a = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}}$

Exemple : calcul des coefficients a et b

f est une fonction affine telle que **f** (5) = 9 et **f** (7) = 15.

Une fonction affine est de la forme **f** (x) = **ax + b.**

- **étape 1 :** calcul du coefficient « a »

  $\boldsymbol{a} = \dfrac{f(7) - f(5)}{7 - 5} = \dfrac{15 - 9}{2} = \dfrac{6}{2} = 3$. On a donc **f** (x) = 3x + b.
- **étape 2 :** calcul du coefficient « b »

On sait que $f(5) = 9$ donc $9 = 3 \times 5 + b$.

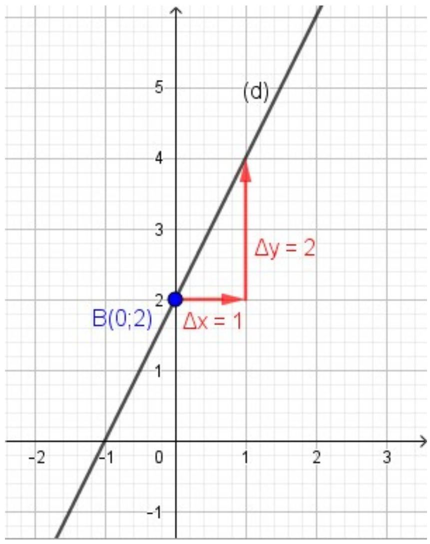
D'où $b = 9 - 15 = -6$.

On a donc $f(x) = 3x - 6$.

V. Détermination graphique des coefficients

Exemple 1

On considère la fonction affine f dont la droite (**d**) est sa représentation graphique.



- **étape 1** : calcul du coefficient « a »

  On utilise la **« méthode en escalier »** pour déterminer le coefficient directeur :

  $a = \frac{déplacement\ vertical}{déplacement\ horizontal} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$

  $a = \frac{+2}{+1}$

  Donc $\boldsymbol{a} = 2$.

- **étape 2** : calcul du coefficient « b »

  La droite (**d**) coupe l'axe des ordonnées au point B(0 ; 2).

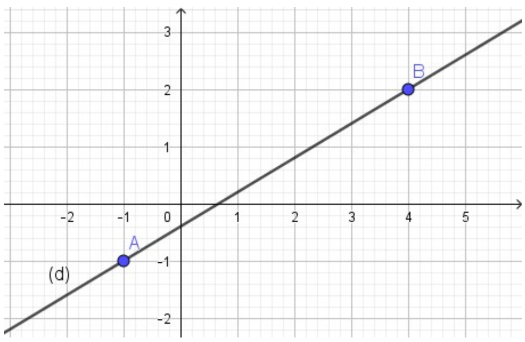
  L'ordonnée à l'origine de cette droite est **b = 2**.

La droite (d) a donc pour équation $y = 2x + 2$.

Exemple 2

On considère la fonction affine **g** dont la droite (**d**) est sa représentation graphique.

La droite (d) passe par les points A(-1;-1) et B(4;2).



- **étape 1** : calcul du coefficient « a »

  $\boldsymbol{a} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{2-(-1)}{4-(-1)} = \frac{2+1}{4+1} = \frac{3}{5}$.

  On a donc $f(x) = \frac{3}{5}x + b$.

- **étape 2** : calcul du coefficient « b »

Le point A $\in$ (d) donc ses coordonnées vérifient l'équation donc $-1 = \frac{3}{5} \times (-1) + b$

$b = -1 + \frac{3}{5} = -\frac{5}{5} + \frac{3}{5} = -\frac{2}{5}$

La droite (d) a donc pour équation $y = \frac{3}{5}x - \frac{2}{5}$.