Equations et Inéquations

$$Ego = \frac{1}{Knowledge}$$

« More the Knowledge... Lesser the Ego..., Lesser the Knowledge... More the Ego... »

Albert Einstein

I. Définitions

Définitions

- Une **équation (inéquation)** est une égalité (inégalité) comportant une valeur variable (représentée par une lettre) appelée **inconnue.**
- Un nombre qui, remplaçant l'inconnue, rend l'égalité vraie est une **solution** de l'équation.
- **Résoudre** l'équation (l'inéquation), c'est trouver toutes les solutions s'il y en a, ou, le cas échéant, prouver qu'il n'y en a aucune.

Exemples

$6x - 5 = 9x + 11$ → Équation d'inconnue x

$4a + 5 = a + 3$ → Équation d'inconnue a

$3x + 3 \leq 4$ → Inéquation d'inconnue x

Remarques

- Une équation peut admettre une unique solution, ou plusieurs (voire une infinité), ou encore aucune.
- Une équation peut comporter plusieurs inconnues.

II. Equations du premier degré à une inconnue

Définition

Le degré d'une équation à une inconnue x, est l'exposant le plus élevé de x (après développement et réduction)

Exemples

- $2x^2 - x = 12$ est du second degré (degré 2) car il y a x²
- $(2x + 3)(5x - 1) = 12$ est du second degré car après développement on obtient $10x^2 + 13x - 3 = 12$
- $(3x - 2)^2 = 9x^2$ est du 1er degré malgré les apparences

Propriétés fondamentales (rappel)

Pour tous nombres a, b, c

- Si $a = b$ alors $a + c = b + c$
  Une égalité est *conservée* si l'on *ajoute* un *même nombre* à ses deux membres.
- Si $a = b$ alors $ac = bc$
  Une égalité est *conservée* si l'on *multiplie* ses deux membres par un *même nombre*.

Définition

Le degré d'une équation à une inconnue x, est l'exposant le plus élevé de x (après développement et réduction)

Remarques

Toutes les équations de degré 1 se résolvent grâce aux propriétés fondamentales.

Méthode de résolution

Résoudre l'équation $4(2x - 5) = 2 + 10(x - 2)$

1. On peut **développer et réduire** chaque membre.
   $4(2x - 5) = 2 + 10(x - 2)$
   $\mathbf{8x - 20 = 2 + 10x - 20}$
   $\mathbf{8x - 20 = -18 + 10x}$
2. On peut **regrouper les termes** en x dans un membre et les nombres connus dans l'autre.
   $\mathbf{8x - 10x = -18 + 20}$
   $\mathbf{-2x = 2}$
3. Il reste à **diviser les 2 membres** par un même nombre (ici -2).
   $\mathbf{\frac{-2x}{-2} = \frac{2}{-2}}$
   $\mathbf{x = -1}$
4. Il faut **vérifier** dans l'équation de départ.
   $\mathbf{4(2 \times (-1) - 5) = 2 + 10(-1 - 2)}$

$$4(-7) = 2 + 10(-3)$$

-28=-28

5. Pour terminer il faut **conclure**

   La solution est -1

III. Inéquations du premier degré à une inconnue

Propriétés fondamentales

Pour tous nombres a, b, c

- Si $a \leq b$ alors $a + c \leq b + c$

  Une inégalité est conservée si l'on ajoute un même nombre à ses deux membres.

- Si $a \leq b$ et $c > 0$ alors $ac \leq bc$

  Une inégalité est **conservée** si l'on **multiplie** ses deux membres par un même nombre **positif**.

  Si $a \leq b$ et $c < 0$ alors $ac \geq bc$

  Une inégalité **change de sens** si l'on **multiplie** ses deux membres par un même nombre **négatif**.

Exemple 1

Résoudre l'inéquation $2(x + 1) - 5x \geq 5 - (x - 2)$

$$2(x + 1) - 5x \geq 5 - (x - 2)$$

$$2x + 2 - 5x \geq 5 - x + 2$$

$$-3x + 2 + x - 2 \geq 7 - x + x - 2 \text{ d'après la propriété}$$

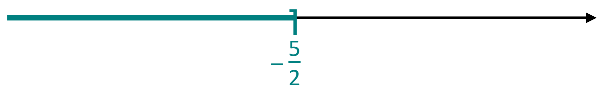
$$-2x \geq 5$$

$$-2x \times \left(-\frac{1}{2}\right) \leq 5 \times \left(-\frac{1}{2}\right) \quad \text{d'après la propriété avec } -\frac{1}{2} < 0$$

$$x \leq -\frac{5}{2}$$

Les solutions de l'inéquation sont les nombres **inférieurs ou égaux à** $-\frac{5}{2}$.

Représentation graphique de l'ensemble des solutions :



Remarque

Le crochet **fermé** (c.-à-d. tourné vers l'ensemble des solutions) indique que $-\frac{5}{2}$ appartient à l'ensemble.

Exemple 2

Résoudre l'inéquation $-\frac{2}{3}\left(x - \frac{9}{2}\right) - 7 > -5x + 1 - (2 - 4x)$

$$\begin{array}{lll}
-\frac{2}{3}\left(x - \frac{9}{2}\right) - 7 & > & -5x + 1 - (2 - 4x) \\
-\frac{2}{3}x + 3 - 7 & > & -5x + 1 - 2 + 4x \\
-\frac{2}{3}x - 4 & > & -x - 1 \\
-\frac{2}{3}x - 4 + x + 4 & > & -x - 1 + x + 4 \quad \text{d'après la propriété} \\
-\frac{2}{3}x + \frac{3}{3}x & > & 3 \\
\frac{1}{3}x & > & 3 \\
\frac{1}{3}x \times 3 & > & 3 \times 3 \quad \text{d'après la propriété avec } 3 > 0 \\
x & > & 9
\end{array}$$

Les solutions de l'inéquation sont les nombres **strictement supérieurs à 9.**

Représentation graphique de l'ensemble des solutions :

9

Remarque

Le crochet **ouvert** (c.-à-d. « tournant le dos » à l'ensemble des solutions) indique que 9 n'appartient pas à l'ensemble.

IV. Equations à produit nul

A. Propriétés

Propriété

Dans un produit, si un facteur est nul alors ce produit est nul.

Exemple

$3 \times (-4)^2 \times 2009 \times (2 - x) \times 0 \times (10 - 12) = 0$

Réciproquement

Propriété

Si un produit est nul, alors au moins l'un des facteurs est nul.

B. Méthode de résolution

Résoudre l'équation $x(2x+3)(x-1)=0$

C'est une équation produit nul.

Propriété : Un produit de facteurs est nul si au moins l'un des facteurs est nul.

$x=0$ ou $2x+3=0$ ou $x-1=0$

$2x=-3$ $\quad x=1$

$x=\frac{-3}{2}$

Il y a trois solutions : 0, $-\frac{3}{2}$ et 1 (on peut les vérifier dans l'équation de départ).

Exemple

Résoudre l'équation $3(x-2)^2+(x-2)(2x+3)=0$

$3(x-2)^2+(x-2)(2x+3)=0$

$(x-2)[(3(x-2)+(2x+3)]=0$

$(x-2)(5x-3)=0$

On a une équation produit nul.

Or, Un produit de facteurs est nul si l'un des facteurs au moins est nul

$x-2=0$ ou $5x-3=0$

$x=2$ ou $5x=3$

$x=2$ ou $x=\frac{3}{5}$

L'équation admet deux solutions : 2 et $\frac{3}{5}$.

C. Un cas particulier : l'équation $x^2=a$

Propriété

Soit a un nombre.

- Si $a>0$, l'équation $x^2=a$ admet **deux** solutions : $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$
- Si $a=0$, l'équation $x^2=a$ admet **une** seule solution : 0
- Si $a<0$, l'équation $x^2=a$ n'admet **aucune** solution.

Démonstration

Soit a un nombre. On cherche à résoudre l'équation $x^2=a$.

- Cas 1 : $a>0$
  - On admet qu'il existait au moins un nombre r tel que $r^2=a$.
  - Quel que soit le signe de r, on a $(-r)^2=r^2=a$.

    Ainsi l'équation $x^2=a$ admet au moins deux solutions : r et $-r$.

Comme $a \neq 0$, on a $r \neq 0$ (sinon $r^2 = a = 0$)

On en déduit que, de r et $-r$, l'un est *strictement positif*, et l'autre *strictement négatif*.

- On <u>admet</u> que ces deux nombres étaient <u>les seuls</u> à vérifier $x^2 = a$, et celui des deux qui est positif a été noté $\sqrt{a}$. On a donc $(\sqrt{a})^2 = a$, avec $\sqrt{a} > 0$.

  On peut désormais <u>démontrer</u> que $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$ sont les *seules solutions de l'équation* $x^2 = a$:

  $x^2 = a$

  équivaut à $x^2 - a = 0$

  " $x^2 - (\sqrt{a})^2 = 0$

  " $(x - \sqrt{a})(x + \sqrt{a}) = 0$ *(1)*

  Or si un produit est nul alors l'un de ses facteurs est nul et réciproquement.

  (1) équivaut donc à $x - \sqrt{a} = 0$ ou $x + \sqrt{a} = 0$

  équivalent à $x = \sqrt{a}$ ou $x = -\sqrt{a}$

  Ainsi, l'équation $x^2 = a$ admet exactement <u>deux solutions</u> : $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$

- <u>Cas 2</u> : $a = 0$

  L'équation $x^2 = a$ s'écrit $x^2 = 0$

  $x \times x = 0$

  équivalent à $x = 0$ ou $x = 0$

  c'est-à-dire $x = 0$

- <u>Cas 3</u> : $a < 0$

  Pour tout nombre x, on a $x^2 \geq 0$.

  On en déduit que si $a < 0$, l'équation $x^2 = a$ n'admet *aucune solution*.

Exemples

- Résoudre l'équation $x^2 = -4$. Comme $-4 < 0$ alors l'équation n'a pas de solution.
- Résoudre l'équation $x^2 = 9$. Comme $9 > 0$ l'équation a deux solutions : 3 et -3.
- Résoudre l'équation $x^2 = 6$. Comme $6 > 0$ l'équation a deux solutions : $\sqrt{6}$ et $-\sqrt{6}$.