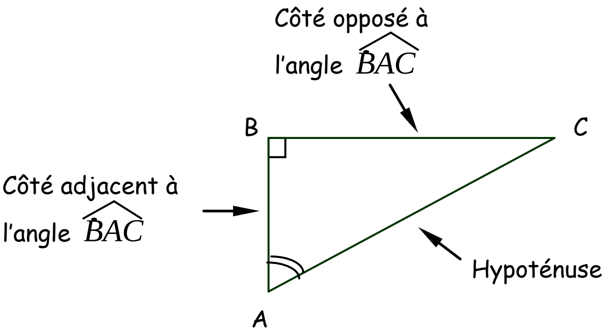
Trigonométrie

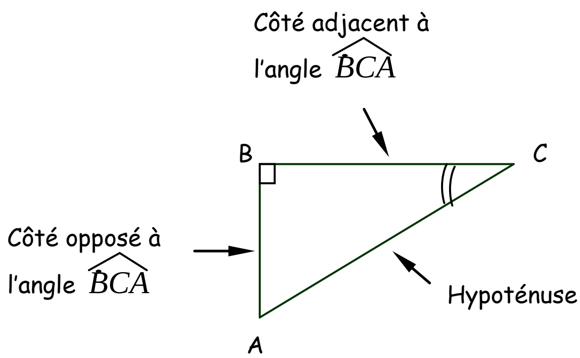
«Toute la géographie, la trigonométrie et l'arithmétique ne servent à rien
si tu n'apprends pas à penser par toi même. [...] »

Carlos Ruiz Zafón

I. Vocabulaires

Soit ABC un triangle rectangle en B.





Définitions

Soit ABC un triangle rectangle en B.

- [AC] est **l'hypoténuse**.
- [AB] est le côté **adjacent** à l'angle $\hat{A}$.
- [BC] est le côté **opposé** à l'angle $\hat{A}$.

rappel : Les deux angles aigus d'un triangle rectangle sont complémentaires, c'est-à-dire que la somme de leurs mesures vaut 90 °.

II. Cosinus, sinus et tangente d'un angle aigu.

Définitions

Dans un triangle **rectangle** :

- le cosinus d'un angle aigu $\widehat{A}$, noté cos $\widehat{A}$, est égal au quotient :

$$\cos \widehat{A} = \frac{\text{longueur du côté } \textbf{adjacent} \text{ à l'angle } \widehat{A}}{\text{longueur de l'} \textbf{hypoténuse}}$$

- le sinus d'un angle aigu $\widehat{A}$, noté sin $\widehat{A}$, est égal au quotient :

$$\sin \widehat{A} = \frac{\text{longueur du côté } \textbf{opposé} \text{ à l'angle } \widehat{A}}{\text{longueur de l'}\textbf{hypoténuse}}$$

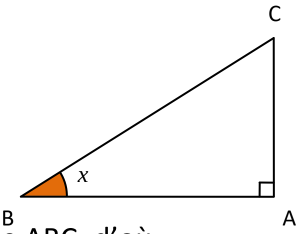
- la tangente d'un angle aigu $\widehat{A}$, noté tan $\widehat{A}$, est égale au quotient :

$$\tan \widehat{A} = \frac{\text{longueur du côté } \textbf{opposé} \text{ à l'angle } \widehat{A}}{\text{longueur du côté } \textbf{adjacent} \text{ à l'angle } \widehat{A}}$$

Remarques

- On peut mémoriser ces définitions en retenant la formule suivante: **SOH – CAH – TOA** **(S : sinus ; C : cosinus ; T : tangente ; A : adjacent ; O : opposé ; H : hypoténuse)**
- Pour calculer ces rapports, les longueurs doivent être exprimées dans la ***même unité***.
- **ATTENTION !!!!** Pour utiliser la calculatrice, veillez à ce qu'elle soit en **mode degré**.

III. Propriétés



Soit x la mesure d'un angle aigu (0° < x < 90°),
et un triangle ABC rectangle en A tel que $\hat{B} = x$.

- L'hypoténuse [BC] est le plus grand des trois côtés du triangle ABC, d'où

$$0 < AB < BC \quad \text{et} \quad 0 < AC < BC$$

d'où $0 < \frac{AB}{BC} < \frac{BC}{BC}$ et $0 < \frac{AC}{BC} < \frac{BC}{BC}$

Ainsi,

Propriété

Pour toute mesure x d'un angle *aigu*, on a $0 < \cos x < 1$ et $0 < \sin x < 1$

- Calculons

$$(\cos x)^2 + (\sin x)^2 = \left(\frac{AB}{BC}\right)^2 + \left(\frac{AC}{BC}\right)^2$$
$$= \frac{AB^2}{BC^2} + \frac{AC^2}{BC^2}$$
$$= \frac{AB^2 + AC^2}{BC^2}$$

Or ABC est rectangle en A, donc d'après le théorème de Pythagore, $AB^2 + AC^2 = BC^2$

d'où $(\cos x)^2 + (\sin x)^2 = \frac{BC^2}{BC^2} = 1$

Propriété

Pour toute mesure x d'un angle aigu, on a $(\cos x)^2 + (\sin x)^2 = 1$

- Calculons $\dfrac{\sin x}{\cos x} = \dfrac{\frac{AC}{BC}}{\frac{AB}{BC}}$

$= \dfrac{AC}{BC} \times \dfrac{BC}{AB}$

$= \dfrac{AC}{AB}$

Propriété

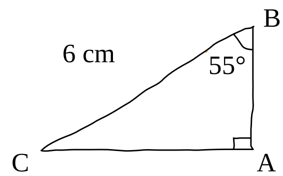
Pour toute mesure x d'un angle aigu, on a $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$

IV. Applications

A. Calcul de la longueur d'un côté

énoncé 1

Soit le triangle ABC rectangle en A tel que BC = 6 cm et $\widehat{ABC}$ = 55°. Calcule la longueur du côté [AB], arrondie au millimètre.



solution

Le triangle ABC est rectangle en A donc :

$\cos \widehat{ABC} = \dfrac{\textbf{côté adjacent à } \widehat{ABC}}{\textbf{hypoténuse}}$

$\cos ABC = \dfrac{\mathbf{BA}}{\mathbf{BC}}$

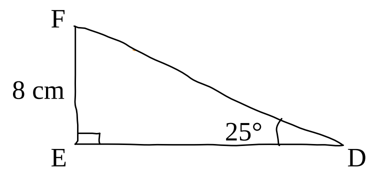
$\cos 55° = \dfrac{\mathbf{BA}}{\mathbf{6}}$

BA = 6 × cos 55 °

BA ≃ 3,4 cm

énoncé 2

Soit le triangle DEF rectangle en E tel que EF = 8 cm et $\widehat{EDF}$= 25°. Calcule la longueur de l'hypoténuse [DF], arrondie au millimètre.



solution

Le triangle DEF est rectangle en E donc :

$\sin EDF = \dfrac{\text{côté } \textbf{opposé} \text{ à } \widehat{EDF}}{\textbf{hypoténuse}}$

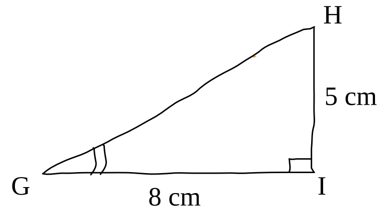
$\sin \widehat{EDF} = \dfrac{EF}{DF}$

$\sin 25° = \dfrac{8}{DF}$

$DF = \dfrac{8}{\sin 25°}$

DF ≃ 18,9 cm

B. Calcul de la mesure d'un angle



énoncé

Soit le triangle GHI rectangle en I tel que GI = 8 cm et HI = 5 cm.
Calcule la valeur approchée, au degré près, de l'angle HGI.

solution

Le triangle GHI est rectangle en I donc :

$\tan \widehat{HGI} = \frac{\text{côté opposé à } \widehat{HGI}}{\text{côté adjacent à } \widehat{HGI}}$

$\tan \widehat{HGI} = \frac{HI}{GI}$

$\tan \widehat{HGI} = \frac{5}{8}$

$\widehat{HGI} \simeq 32\,°$

V. EPI : loi des sinus

Propriété

Dans tout triangle, les longueurs des côtés sont proportionnelles aux sinus des angles opposés.

$$\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}}$$