Géométrie de l'espace

« Il est impossible d'être mathématicien
sans avoir une âme de poète. »

Hypatie d'Alexandrie

I. Solides (Rappel)

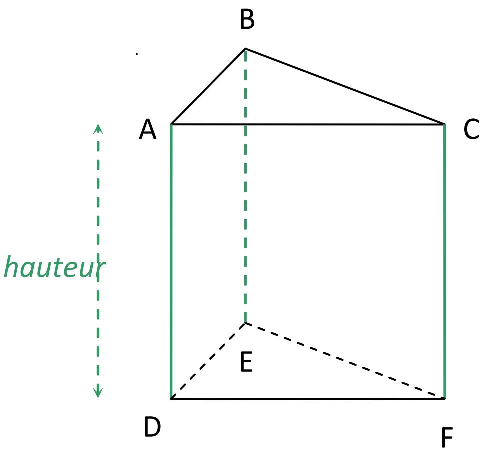
A. Prisme droit

Définitions

Un **prisme droit** est un **solide :**

- qui a deux faces polygonales superposables et parallèles. On les appelle **bases.**
- dont toutes les autres faces sont des rectangles. On les appelle **faces latérales.**

Les arêtes qui joignent les bases sont appelées arêtes latérales.

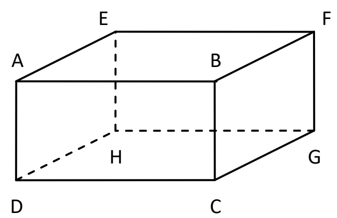


Dans le prisme droit ABCDEF :

- Les bases sont ABC et DEF.
- Les faces latérales sont ACFD, BCFE et BADE.
- Les arêtes latérales sont [AD], [CF] et [BE].

Remarque

Toutes les faces d'un *pavé droit (parallélépipède rectangle)* sont des rectangles, donc des polygones, deux à deux parallèles : il vérifie donc la définition d'un prisme droit. Autrement dit, *un pavé droit est un cas particulier de prisme droit*, dont chacun des couples de faces opposées peut être considérées comme bases.

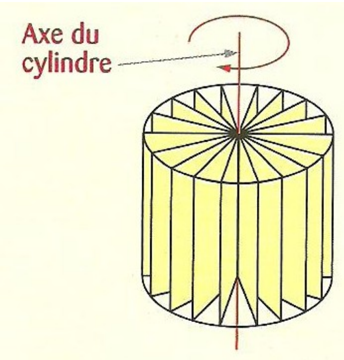


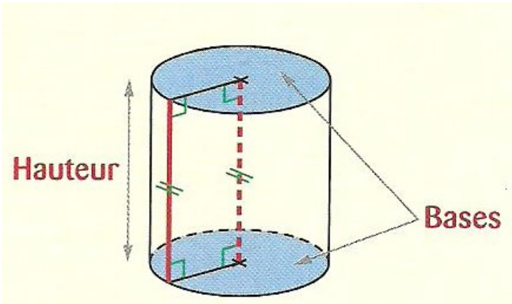
B. Cylindre de révolution

Définitions

Un **cylindre de révolution** est le solide décrit par un rectangle tournant autour de l'un de ses côtés. Il comporte :

- deux faces qui sont des *disques parallèles* et *de même rayon r*. On les appelle **bases.**
- une face latérale courbe dont *un patron possible* est un rectangle (l'une des dimensions de ce rectangle est égale au périmètre des bases, l'autre dimension est appelée **hauteur** du cylindre).





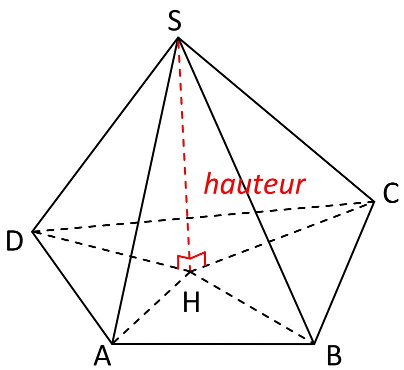
C. Pyramide

Définitions

Une **pyramide** est un **solide :**

- qui a une face polygonale, appelée **base.**
- dont toutes les autres faces sont des *triangles*. On les appelle **faces latérales.**

Les arêtes qui joignent la base et le **sommet** de la pyramide sont appelées **arêtes latérales.**



Dans la pyramide SABCD :

-La base est ABCD.

-Les faces latérales sont SAD, SAB, SBC et SCD.

-Les arêtes latérales sont [SA], [SB], [SC] et [SD].

Définition

Une pyramide est dite **régulière** lorsque :

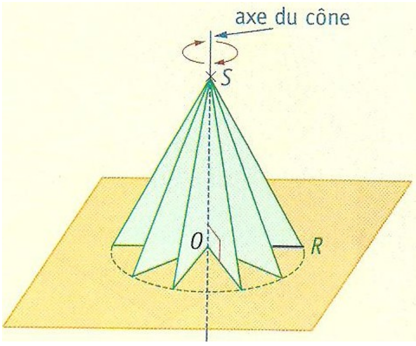
- sa base est un **polygone régulier** (triangle équilatéral, carré, ...) ;
- ses faces latérales sont des **triangles isocèles superposables.**

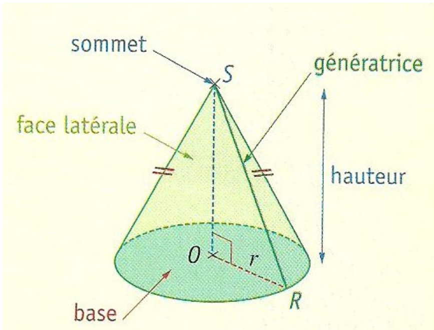
D. Cône de révolution

Définitions

Un **cylindre de révolution** est le solide décrit par un triangle rectangle tournant autour de l'un des côtés de l'angle droit. Il comporte :

- un disque de rayon r appelé **base.**
- une surface courbe qui est une portion de disque de centre S « enroulée » autour de la base, appelée **face latérale.**





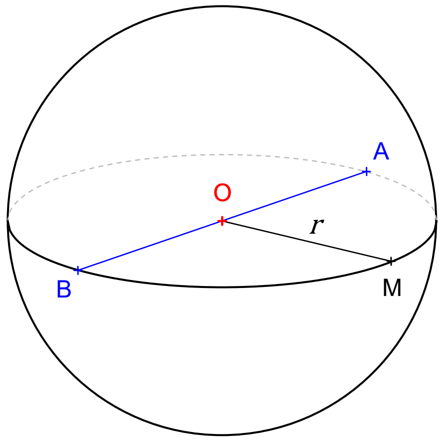
E. Sphère et boule

Définitions

Soit O un point de l'espace et r une longueur.

- La **sphère** de centre O et de rayon r est l'ensemble des points M de l'espace tels que $OM = r$.
- La **boule** de centre O et de rayon r est l'ensemble des points M de l'espace tels que $OM \leq r$.

Remarques



- Un **diamètre** est un segment qui joint deux points de la sphère et qui passe par son centre O.
- Un **rayon** est un segment qui joint un point de la sphère et son centre O.
- Un cercle de centre O et de rayon *r* s'appelle un **grand cercle** de la sphère.
- La **boule** est un solide :ce mot désigne à la fois la surface et l'intérieur du solide.
- La **sphère** est la surface de ce solide.

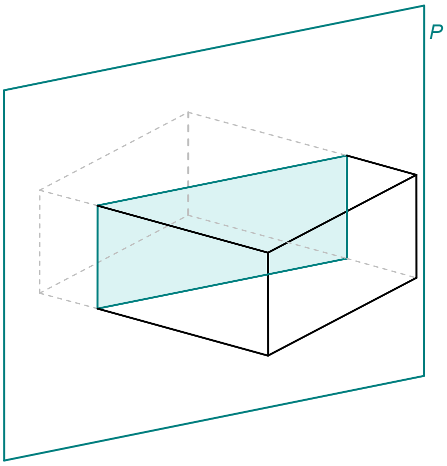
II. Sections planes

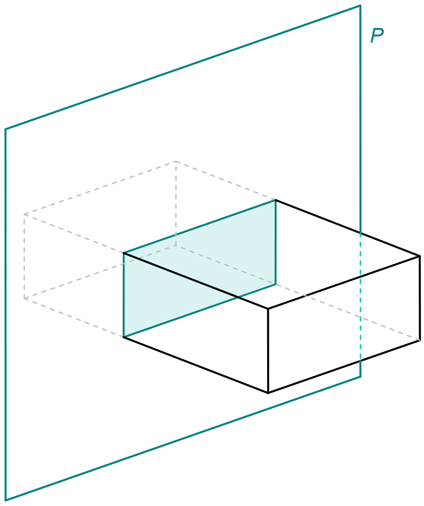
Etant donné un solide, une **section plane** d'un solide est l'ensemble des points appartenant *à la fois* au solide et au plan. Ce sont donc des figures de la géométrie plane.
Intuitivement, elles correspondent à ce que l'on voit quand on « coupe droit » le solide.

A. Section d'un prisme droit par un plan

Propriété

- La section d'un prisme droit par un plan parallèle à une base est un **polygone superposable à cette face.**
- La section d'un prisme droit par un **plan parallèle à une arête latérale** est un **rectangle** dont une dimension est la longueur de l'arête.

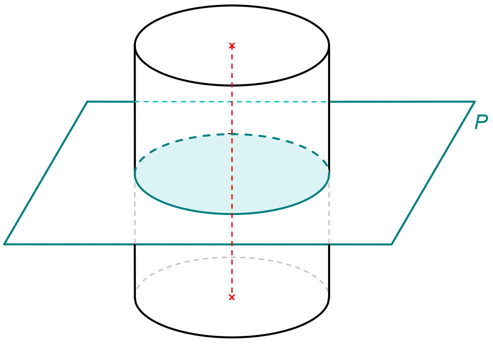


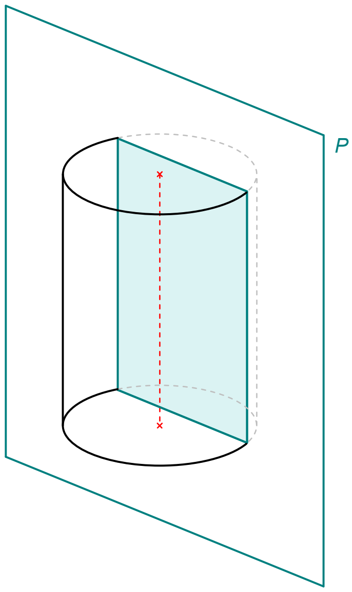


B. Section d'un cylindre par un plan

Propriété

- La section d'un cylindre de révolution par un plan parallèle aux bases (c.-à-d. perpendiculaire à l'axe du cylindre) est un **disque de même rayon.**
- La section d'un cylindre de révolution par un plan perpendiculaire aux bases (c.-à-d. parallèle à l'axe du cylindre) est un **rectangle** dont l'une des dimensions est la hauteur du cylindre.

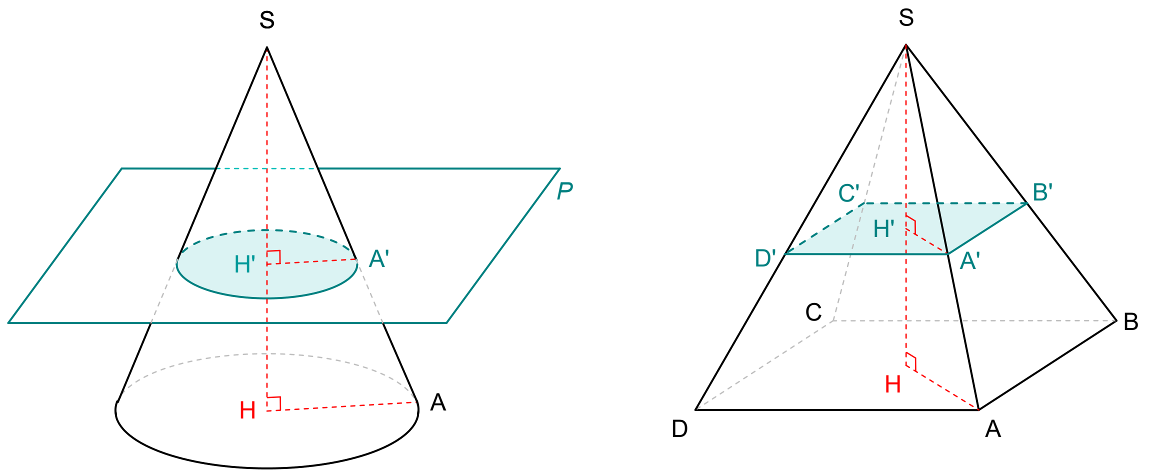




C. Section d'une pyramide et d'un cône par un plan

Propriété

La section d'un cône ou d'une pyramide par un plan parallèle à la base est une **réduction de cette base.**



En notant k **le rapport de la réduction**, on a H'A' = k × HA, d'où $k = \dfrac{H'A'}{HA}$

Or :

- (HH') et (AA') sont sécantes en S
- le plan de section est parallèle à la base, donc (HA) // (H'A')

D'après le théorème de Thalès, $\dfrac{SH'}{SH} = \dfrac{SA'}{SA} = \dfrac{HA'}{HA} = k$.

Propriété

La section d'un cône ou d'une pyramide par un plan parallèle à la base est elle-même la base d'un cône ou d'une pyramide qui est une **réduction** du solide initial, de coefficient

$$k = \frac{\text{dimension du solide réduit}}{\text{dimension correspondante dans le solide initial}}$$

En particulier, en notant h la hauteur du solide initial
h' la hauteur du solide réduit

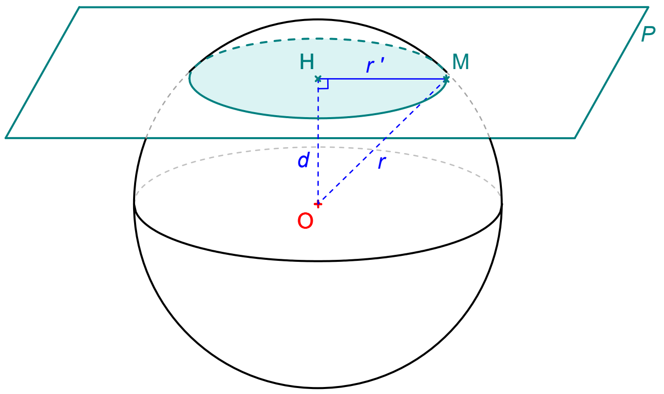
on a $k = \dfrac{h'}{h}$

D. Section d'une sphère

Propriété

- La section d'une sphère par un plan est un **cercle.**

- La section d'une boule par un plan est un **disque.**



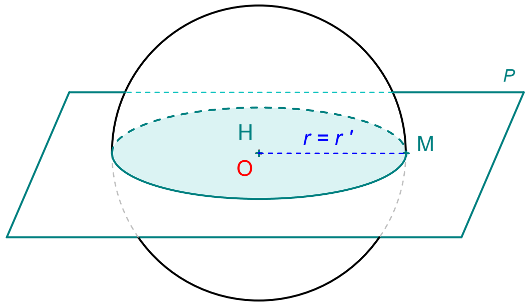
Remarque

Le rayon de la section d'une sphère/boule de rayon r par un plan passant à la distance d du centre est $r' = \sqrt{r^2 - d^2}$.

Cas particuliers

1. Le plan passe par le centre de la sphère : la section de la sphère en est un grand cercle.

   $d = 0$ et $r' = r$



2. Le plan et la sphère n'ont *qu'un seul point commun* : on dit que le plan est **tangent** à la sphère.

   $d = r$ et $r' = 0$