Calcul littéral
Factorisation, développement et Identités remarquables

«Toute chose nouvelle se présente ordinairement
à son origine rude et informe
pour être polie et perfectionnée dans les siècles suivants. »

François Viète

I. Règles de distributivité

Définitions

- **Développer,** c'est transformer un **produit** en une **somme** ou une **différence.**
- **Factoriser**, c'est transformer une **somme** (ou une **différence**) en un **produit.**

Je factorise

FORME DEVELOPPEE **FORME FACTORISEE**

Je développe

$$k\,a + k\,b = k\,(a + b)$$
$$k\,a - k\,b = k\,(a - b)$$

k **: facteur commun**

Remarque : double développement.

$(a + b)\,(c + d) = ac + ad + bc + bd$

Exemples

- **Développements**

$4\,(3x+2) = 4\times 3x + 4\times 2 = 12x+8$
$3\,(2x-5) = 3\times 2x - 3\times 5 = 6x-15$
$(x+1)(x+2) = x\times x + x\times 2 + 1\times x + 1\times 2 = x^2 + 2x + x + 2 = x^2 + 3x + 2$

- **Factorisations**

$25x+15 = 5\times 5x + 5\times 3 = 5\,(5x+3)$
$2x^2 - x = x\times 2x - x\times 1 = x\,(2x-1)$
$9x^2 - 12x = 3\times x\times 3\times x - 3\times 4\times x = 3x\,(3x-4)$
$(3x-2)(2x+5) - (3x-2)(x+4) = (3x-2)\left[(2x+5) - (x+4)\right] = (3x-2)(2x+5-x-4)$
$= (3x-2)(x+1)$
$(x-5)^2 - 2(x-5)(x+3) = (x-5)\times(x-5) - 2(x-5)(x+3) = (x-5)\left[(x-5) - 2(x+3)\right]$
$= (x-5)(x-5-2x-6) = (x-5)(-x-11) = -(x-5)(x+11)$

II. Identités remarquables

Définition

Une égalité littérale est appelée **identité** si elle est vraie quelles que soient les valeurs attribuées aux lettres qui y sont utilisées.

Exemples

- L'égalité $k(a+b) = ka + kb$ est vraie pour toutes valeurs de a, b, k. C'est donc une identité.
- L'égalité $3a^2 + 1 = 7$ est vraie pour $a = \sqrt{2}$ ou $a = -\sqrt{2}$, mais elle est fausse, par exemple,
  pour $a = -1$, pour $a = 2$ ou pour $a = 37$. Ce n'est donc pas une identité.

Soit a et b deux nombres quelconques.

$(a+b)^2 = (a+b)(a+b)$ $= a^2 + ab + ba + b^2$ $= a^2 + ab + ab + b^2$ $= a^2 + 2ab + b^2$	$(a-b)^2 = (a-b)(a-b)$ $= a^2 - ab - ba + b^2$ $= a^2 - ab - ab + b^2$ $= a^2 - 2ab + b^2$	$(a+b)(a-b) = a^2 - ab + ba - b^2$ $= a^2 - \cancel{ab} + \cancel{ab} - b^2$ $= a^2 - b^2$

Propriété

Pour tous nombres a et b,

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

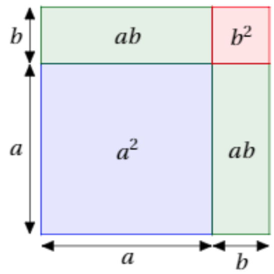
$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

Illustration géométrique de $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ pour a et b positifs

Un côté du grand carré mesure a+b. Son aire est donc $(a+b)^2$.

Cette aire peut également décomposée comme la somme des aires de deux carrés et de deux rectangles.

Ainsi $(a + b)^2 = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$.



Exemples

- **Développements.**

$(3x + 2)^2 = (3x)^2 + 2 \times 3x \times 2 + 2^2 = 9x^2 + 12x + 4$

$(4x - 5)^2 = (4x)^2 - 2 \times 4x \times 5 + 5^2 = 16x^2 - 40x + 25$

$(2x + 1) \times (2x - 1) = (2x)^2 - (1)^2 = 4x^2 - 1$

- **Factorisations**

$4x^2 + 20x + 25 = (2x)^2 + 2 \times 2x \times 5 + 5^2 = (2x + 5)^2$

$x^2 - 81 = x^2 - 9^2 = (x + 9)(x - 9)$

$(3x - 4)^2 - 36 = (3x - 4)^2 - 6^2 = (3x - 4 + 6)(3x - 4 - 6) = (3x + 2)(3x - 10)$

$(2x + 1)^2 - (-x + 5)^2 = [(2x + 1) + (-x + 5)][(2x + 1) - (-x + 5)] = (x + 6)(3x - 4)$