

Arithmétique

« En janvier 2016, des mathématiciens américains ont découvert un nombre premier comptant plus de 22 millions de chiffres. »

$$2^{74\,207\,281} - 1$$

I. Diviseur

A. Définition

Définition

Un **diviseur** est un nombre qui divise un autre nombre exactement (sans reste).

Autrement dit

Soit n et p deux entiers naturels.

On dit que p est un **diviseur** de n (ou que p **divise** n

ou que n est **divisible** par p

ou que n est un **multiple** de p)

s'il existe un entier naturel q tel que $n = p \times q$

Exemple

9 est un diviseur de 63, parce que $9 \times 7 = 63$ (cette égalité montre que 7 est également un diviseur de 63).

B. Diviseur commun

Définition

a et b étant deux entiers naturels, on appelle **diviseur commun** à a et b tout entier qui est à la fois un diviseur de a et de b .

Exemple

Déterminer l'ensemble des diviseurs communs à 30 et 48

$$\begin{array}{lcl}
 30 & = & 1 \times 48 \\
 30 & = & 2 \times 24 \\
 & = & 3 \times 16 \\
 & = & 4 \times 12 \\
 & = & 5 \times 6 \\
 & = & 6 \times 8
 \end{array}$$

Diviseurs de 30 : 1 ; 2 ; 3 ; 5 ; 6 ; 10 ; 15 ; 30

Diviseurs de 48 : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 8 ; 12 ; 16 ; 24 ; 48

Diviseurs communs à 30 et 48 : 1 ; 2 ; 3 ; 6

II. Nombres premiers

A. Définition

Définition

Un nombre *premier* est un nombre entier qui n'a que deux diviseurs : 1 et lui-même.

Exemples

- Les diviseurs de 23 : ~~1;2;3;4;5;6;7;8;9;10;11;12;13;14;15;16;17;18;19;20;21;22;23~~.
1 et 23 sont les diviseurs de 23 donc 23 est un nombre premier.
- Les diviseurs de 6 : 1 ; 2 ; 3 ; ~~4 ; 5~~ ; 6.
6 n'est pas un nombre premier.
- 1 n'admet qu'un seul diviseur donc 1 n'est pas un nombre premier.
- Les vingt – cinq nombres premiers inférieurs à 100 sont : 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89 et 97.

B. Décomposition en facteurs premiers

Définition

Un nombre entier supérieur ou égal à 2 se décompose en produit de facteurs premiers.

Cette décomposition est unique, à l'ordre des nombres près.

Exemple

1) Décomposition de 220.

220 est divisible par 2, plus petit diviseur premier, d'où $220 / 2 = 110$.

110 est divisible par 2 d'où $110 / 2 = 55$.

55 est divisible par 5 d'où $55 / 5 = 11$.

11 étant un nombre premier, on s'arrête ici.

Ainsi $220 = 2^2 \times 5 \times 11$.

On peut vérifier la décomposition obtenue à l'aide de la calculatrice :

Pour Casio Spéciale collège : $\boxed{2} \boxed{2} \boxed{0} \boxed{\text{EXE}} \boxed{\text{seconde}} + \boxed{\text{†}}$ (décomp).

Pour TI – Collège plus : $\boxed{2} \boxed{2} \boxed{0} \boxed{2\text{nde}} \boxed{>\text{simp}} \boxed{\text{entrer}}$.

2) Diviseurs de 220.

A partir de la décomposition en facteurs premiers du nombre 220, on cherche toutes les combinaisons possibles en multipliant les facteurs entre eux. Les diviseurs de 220 sont donc :

$$\begin{array}{cccccccccccc}
 1 ; & \underbrace{2 ; 5 ; 11}_{\text{Nombres premiers}} ; & 4 & ; & 10 & ; & 20 & ; & 22 & ; & 44 & ; & 55 & ; & 110 & ; & 220. \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 & & 2^2 & & 2 \times 5 & & 2^2 \times 5 & & 2 \times 11 & & 2^2 \times 11 & & 5 \times 11 & & 2 \times 5 \times 11 & & 2^2 \times 5 \times 11
 \end{array}$$

III. Application : Fractions irréductibles

Rappel

Une fraction ne change pas quand on multiplie ou quand on divise son numérateur et son dénominateur par un même nombre, autre que le zéro.

Définition

Une fraction est dite *irréductible* lorsque le numérateur et le dénominateur n'ont pas de diviseur commun autre que 1.

Exemple

Ecrire la fraction $\frac{120}{84}$ sous forme d'une fraction irréductible.

On sait que $120 = 2^3 \times 3 \times 5$ et $84 = 2^2 \times 3 \times 7$.

On en déduit que $\frac{120}{84} = \frac{2^3 \times 3 \times 5}{2^2 \times 3 \times 7} = \frac{\cancel{2} \times \cancel{2} \times 2 \times \cancel{3} \times 5}{\cancel{2} \times \cancel{2} \times 3 \times 7} = \frac{2 \times 5}{7} = \frac{10}{7}$. $\frac{10}{7}$ est une fraction irréductible.