# Multiples et diviseurs d'un entier

« Ce qui est affirmé sans preuve peut-être nié sans preuve. »

Euclide

## I. Division euclidienne

**Définition**

Effectuer la division euclidienne d'un nombre entier $a$ (appelé dividende) par un nombre entier $b$ non nul (appelé diviseur), c'est trouver deux nombres entiers $q$ (appelé quotient ) et $r$ (appelé reste) tels que :

$$\begin{cases} a = b \times q + r \\ r < b \end{cases}$$

**Exemple**

Un fleuriste dispose de 305 roses pour composer 23 bouquets. Combien y-a-t-il de roses dans chaque bouquets ?

Va-t-il lui rester des roses ? Si oui, combien ?

**Calcul posé**

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | c | d | u | | |
| | 3 | 0 | 5 | 2 | 3 |
| – | 2 | 3 | | 1 | 3 |
| | | 7 | 5 | | |
| | – | 6 | 9 | | |
| | | | 6 | | |

305 = 23 x 13 + 6.

Les bouquets seront composés de 13 roses. Il lui en restera 6.

**Avec la calculatrice**

En tapant sur la calculatrice : 305 23

On obtient : Q = 13 et R = 6.

## II. Multiples et diviseurs

**Définition**

Un nombre entier a est un multiple d'un nombre entier b (b ≠ 0) lorsque le reste de la division euclidienne de a par b est 0.

On dit aussi que b est un diviseur de a ou que a est divisible par b.

**Exemple : effectuer la division euclidienne de 1944 par 36.**

$1944 = 36 \times 54 + 0$

Ainsi, 1944 est un multiple de 36
1944 est un multiple de 54
1944 est divisible par 36
1944 est divisible par 54
36 et 54 sont des diviseurs de 1944.

**Cas particuliers**

- 1 est un diviseur de tous les nombres entiers.
- Tout nombre entier (≠ 0) est diviseur de 0.
- Tout nombre entier (≠ 0) est un diviseur de lui-même.

# III. Critères de divisibilité

Un nombre entier est **divisible par 2** **s'il se termine par 0, 2, 4, 6 ou 8.**
On dit que c'est un nombre **« *pair* ».**

Un nombre entier est **divisible par 5** **s'il se termine par 0 ou 5.**

Un nombre entier est **divisible par 10** **s'il se termine par 0.**

Un nombre entier est **divisible par 4** **si le nombre formé par les deux derniers chiffres est divisible par 4.**

Un nombre entier est **divisible par 3** **si la somme des chiffres qui le compose est divisible par 3.**

Un nombre entier est **divisible par 9** **si la somme des chiffres qui le compose est divisible par 9.**

Exemples :

- 240 est divisible par 2, par 5 et par 10. En effet, le chiffre des unité est 0.
- 65 est divisible par 5.
- 1 647 est divisible par 3 et par 9. En effet, 1 + 6 + 4 + 7 = 18 et 18 est divisible par 3 et par 9.
- 128 est divisible par 4. En effet, 28 = 7 x 4 donc 28 est divisible par 4.

# IV. Nombres premiers

## A. Définition

*Définition*

Un ***nombre premier*** est un nombre entier qui n'a que deux diviseurs : 1 et lui-même.

**Exemples**

- Les diviseurs de 23 : 1;~~2;3;4;5;6;7;8;9;10;11;12;13;14;15;16:17:18:19;20;21;22~~;23.
  1 et 23 sont les diviseurs de 23 donc 23 est un nombre premier.
- Les diviseurs de 6 : 1 ; 2 ; 3 ; ~~4 ; 5~~ ; 6.
  6 n'est pas un nombre premier.
- 1 n'admet qu'un seul diviseur donc 1 n'est pas un nombre premier.
- Les vingt – cinq nombres premiers inférieurs à 100 sont : 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89 et 97.

## B. Décomposition en facteurs premiers

***Définition***

Un nombre entier supérieur ou égal à 2 se décompose en produit de facteurs premiers.
Cette décomposition est unique, à l’ordre des nombres près.

**Exemple**

1) Décomposition de 220.

220 est divisible par 2, plus petit diviseur premier, d’où 220 / 2 = 110.
110 est divisible par 2 d’où 110 / 2 = 55.
55 est divisible par 5 d’où 55 / 5 = 11.
11 étant un nombre premier, on s’arrête ici.
Ainsi 220 = 2 × 2 × 5 × 11.

On peut vérifier la décomposition obtenue à l’aide de la calculatrice :

Pour Casio Spéciale collège : $\boxed{2}\boxed{2}\boxed{0}\boxed{\text{EXE}}\boxed{\text{seconde}}$ + (décomp).

Pour TI – Collège plus : $\boxed{2}\boxed{2}\boxed{0}\boxed{\text{2nde}}\boxed{\text{>simp}}\boxed{\text{entrer}}$.

2) Diviseurs de 220.

A partir de la décomposition en facteurs premiers du nombre 220, on cherche toutes les combinaisons possibles en multipliant les facteurs entre eux. Les diviseurs de 220 sont donc :

1 ; $\underbrace{2 ; 5 ; 11}_{\text{Nombres premiers}}$ ; 4 ; 10 ; 20 ; 22 ; 44 ; 55 ; 110 ; 220.

| 4 | 10 | 20 | 22 | 44 | 55 | 110 | 220 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 × 2 | 2 x 5 | 2 × 2 × 5 | 2 x 11 | 2 × 2 × 11 | 5 x 11 | 2 x 5 x 11 | 2 × 2 × 5 x 11 |