

La proportionnalité

« Le temps que l'on met à tourner la page est proportionnel à la sincérité des sentiments. »

Anonyme

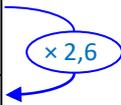
I. Grandeurs proportionnelles

A. Définition

Deux grandeurs sont dites **proportionnelles** lorsque les valeurs de l'une s'obtiennent en **multipliant** les valeurs de l'autre par un **même nombre**.

Exemple

Quantité de poires (en kg)	2	3	5	8
Prix (en €)	5,20	7,80	13	20,80



$$\frac{5,2}{2} = \frac{7,8}{3} = \frac{13}{5} = \frac{20,80}{8} = 2,6$$

C'est donc un **tableau de proportionnalité**. Son **coefficient de proportionnalité** est : **2,6**.

En effet :

- il faut multiplier tous les nombres de la 1^{ère} ligne par 2,6 pour obtenir ceux de la 2^{ème},
- le prix d'1 kg de poires est de 2,60 €.

B. Quatrième proportionnelle

Pour calculer une **quatrième proportionnelle**, on peut utiliser **l'égalité des produits en croix**.

En effet, pour le tableau de proportionnalité

a	c
b	d

(où a , b , c et d désignent des nombres relatifs non nuls), on sait que :

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ donc } bc = ad.$$

Exemple

En faisant 8 tours de lac, Étienne a parcouru 6,4 km. Thibault n'a effectué que 5 tours.

Quelle distance (d) a-t-il parcouru ?

8	5
6,4	d

Pour compléter un tableau de proportionnalité, il est nécessaire de connaître deux valeurs correspondantes.

$$\frac{6,4}{8} = \frac{d}{5} \quad \text{donc} \quad 8d = 6,4 \times 5$$

$$d = \frac{6,4 \times 5}{8} = \frac{32}{8} = 4$$

Thibault a parcouru 4 km.

C. Représentation graphique

Propriété

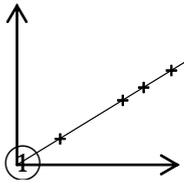
Toute situation de proportionnalité se représente graphiquement par des points alignés avec l'origine du repère.

Propriété réciproque

Tout graphique dont les points sont alignés avec l'origine du repère, représente une situation de proportionnalité.

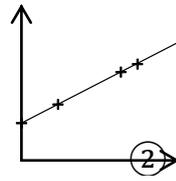
Exemples

Situation de
proportionnalité

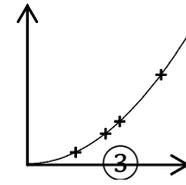


Oui car les points sont alignés avec l'origine du repère.

Situations qui ne sont pas
des situations de proportionnalité



Non car les points sont alignés mais pas avec l'origine du repère



Non car les points ne sont pas alignés.

II. Vitesse

A. Définition

Définition

Lorsque la **durée** d'un parcours effectué par un objet est **proportionnelle** à la **distance** parcourue, on dit que le mouvement est **uniforme**.

Exemple

Pendant un trajet, un routier note les durées et les distances parcourues :

Durée du trajet (en h)	1	1,5	2
Distance parcourue (en km)	80	120	160

x 80

Le coefficient de proportionnalité, obtenu en calculant le quotient de la **distance** parcourue d par la **durée** du parcours t , s'appelle la **vitesse moyenne** v .

$$v = \frac{d}{t}$$

Ici la vitesse moyenne est de 80 km/h.

Exemples

- **Calcul d'une vitesse moyenne :**

Un véhicule parcourt 189 km en 3 h. Quelle est sa vitesse moyenne ?

$$v = \frac{d}{t} = \frac{189}{3} = 63 \text{ km.h}^{-1}$$

Sa vitesse moyenne est de 63 km.h⁻¹ (ou 63 km/h).

- **Calcul d'une distance :**

Quelle distance a parcouru un motard roulant pendant 2 h à une vitesse moyenne de 113 km.h⁻¹ ?

$d = v \times t = 113 \times 2 = 226 \text{ km}$ Ce motard a réalisé un trajet de 226 km.

- **Calcul d'une durée :**

Combien de temps faut-il à un cycliste pour parcourir 98 km à une vitesse moyenne de 26 km.h⁻¹ ?

$$t = \frac{d}{v} = \frac{98}{26} \approx 3,77 \text{ h} \approx 3 \text{ h} + 0,77 \text{ h} \approx 3 \text{ h} + 0,77 \times 60 \text{ min} \approx 3 \text{ h } 46 \text{ min}$$

Ce cycliste a roulé pendant 3 h 46 min environ pour effectuer ce trajet.

B. Unités de vitesse

Selon le choix des unités de temps t et de longueur d , la vitesse v s'exprime en km.h⁻¹ (km/h), m.h⁻¹ (m/h), ...

d	km	m	m
t	h	h	s
v	km.h ⁻¹ (km/h)	m.h ⁻¹ (m/h)	m.s ⁻¹ (m/s)

Remarque

Certaines grandeurs sont liées entre elles par des relations mathématiques. En particulier, celles qui s'expriment à partir d'autres grandeurs sont appelées **grandeurs composées**. Leurs unités de mesure s'expriment à partir de celles des grandeurs de base.

La **vitesse** est une **grandeur quotient**. Elle est obtenue en divisant les mesures de deux autres grandeurs : une **longueur** par une **durée**.

C. Changement d'unités

Exemples

- **Convertir 108 km/h en m/s :**

108 km.h⁻¹ signifie qu'en 1 heure on parcourt 108 km.

$$v_1 = 108 \text{ km.h}^{-1} = \frac{108 \text{ km}}{1 \text{ h}} = \frac{108\,000 \text{ m}}{3\,600 \text{ s}} = 30 \text{ m.s}^{-1}$$

- **Convertir 4 m/s en km/h :**

4 m.s⁻¹ signifie qu'en 1 seconde on parcourt 4 m.

$$v_2 = 4 \text{ m.s}^{-1} = \frac{4 \text{ m}}{1 \text{ s}} = \frac{4 \times 3\,600 \text{ m}}{1 \times 3\,600 \text{ s}} = \frac{14\,400 \text{ m}}{3\,600 \text{ s}} = \frac{14,4 \text{ km}}{1 \text{ h}} = 14,4 \text{ km.h}^{-1}$$

III. Pourcentage

A. Application d'un pourcentage

Propriété

Un **pourcentage** de $t \%$ traduit une situation de proportionnalité de coefficient $\frac{t}{100}$. Donc appliquer un taux de $t \%$ revient à multiplier par $\frac{t}{100}$.

Exemples

- **méthode 1 : tableau de proportionnalité**

Un fromage de 160 g contient 23 % de matière grasse.

Quelle est la masse de matière grasse dans ce fromage ?

Masse de matière grasse (g)	23	x
Masse de fromage (g)	100	160

Coefficient de proportionnalité : $\frac{23}{100}$

$$x = \frac{23}{100} \times 160 = 0,23 \times 160 \\ = 36,8$$

Le fromage contient **36,8 g** de matière grasse.

- **méthode 2 : calcul direct**

Pendant les soldes un article étiqueté à 150 € est soldé -20 %.

Quel est le montant de la réduction ?

20 % de 150, c'est $\frac{20}{100}$ de 150

$$\text{c'est } \frac{20}{100} \times 150 = 30$$

La réduction est de 30 €.

B. Déterminer un pourcentage

Déterminer un pourcentage, c'est déterminer un coefficient de proportionnalité écrite sous forme d'une écriture fractionnaire $\frac{t}{100}$.

Exemples

- **méthode 1 : tableau de proportionnalité**

650 candidats se sont présentés à un examen, et 481 ont été reçus.

Quel est le pourcentage de réussite à cet examen ?

Nombre de candidats reçus	481	p
Nombre total de candidats	650	100

Coefficient de proportionnalité : $\frac{481}{650}$

$$p = \frac{481}{650} \times 100 = 0,74 \times 100 \\ = 74$$

74 % des candidats ont été reçus.

- **méthode 2 : calcul direct**

252 élèves d'un collège de 720 élèves font partie de l'association sportive.

Quel est le pourcentage d'élèves de ce collège qui font partie de cette association ?

Les élèves qui font partie de l'association dans ce collège représentent $\frac{252}{720}$ des élèves (proportion).

Donc $\frac{252}{720} = 0,35 = \frac{35}{100}$.

Le pourcentage d'élèves qui font partie de l'association sportive est de 35%.