Les puissances

« La sagesse fait plus avec des paroles que la puissance avec des armes. »
Proverbe persan

I. Puissance d'exposant positif

a désigne un nombre relatif et *n* un nombre entier positif supérieur à 1 :

$a^n = \underbrace{a \times a \times \ldots \times a}_{n \text{ facteurs}}$ a^n est une **puissance** du nombre *a* et se lit « *a* **exposant** *n* ».

Exemple
15^2 se lit « quinze exposant deux ».
Ce nombre est une puissance de 15 et « 2 » est l'exposant.

Cas particuliers

- $\mathbf{a^1 = a}$
- pour n ≠ 0, $\mathbf{0^n = 0}$
- $\mathbf{a^0 = 1}$ (a ≠ 0).
- a^2 se lit « a au carré »
- a^3 se lit « a au cube ».

Exemples
$(-2{,}1)^0 = 1$
$2^5 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 32$
$\left(-\frac{3}{2}\right)^3 = \left(-\frac{3}{2}\right) \times \left(-\frac{3}{2}\right) \times \left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{27}{8}$

II. Puissance d'exposant négatif

a désigne un nombre relatif non nul et *n* un nombre entier :

a^{-n} désigne **l'inverse** de a^n. $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

Cas particulier

Pour a ≠ 0, $a^{-1} = \frac{1}{a^1} = \frac{1}{a}$ donc a^{-1} est une autre écriture de **l'inverse** de a.

Exemples

$5^{-3} = \frac{1}{5^3} = \frac{1}{5\times5\times5} = \frac{1}{125}$

$4^{-1} = \frac{1}{4^1} = \frac{1}{4} = 0{,}25$

III. Cas particulier : les puissances de 10

A. Puissance de 10 d'exposant positif

Si n désigne un nombre entier positif alors :

- $10^0 = 1$
- $10^n = \underbrace{10 \times 10 \times \ldots \times 10}_{\text{n facteurs}} = \underbrace{10\ldots0}_{\text{n zéros}}$ 10^n se lit « 10 puissance n ».

Exemple

L'écriture décimale de 10^5 s'écrit avec un 1 suivi de 5 zéros donc 10^5 = 100 000.
L'écriture décimale de 10^3 s'écrit avec un 1 suivi de 3 zéros donc 10^3 = 1 000.

B. Puissance de 10 d'exposant négatif

Si n désigne un nombre entier non nul alors :

10^{-n} désigne **l'inverse** de 10^n.

$10^{-n} = \frac{1}{10^n} = \underbrace{\frac{1}{10 \times \ldots \times 10}}_{\text{n facteurs}} = \underbrace{0{,}0\ldots1}_{\text{n zéros (avec l'unité) ou n chiffres après la virgule}}$

Exemple

L'écriture décimale de 10^{-6} possède 6 zéros donc 10^{-6} = 0,000 001.
L'écriture décimale de 10^{-3} possède 3 chiffres après la virgule donc 10^{-3} = 0,001.

C. Règle de calcul

Si *n* et *p* désignent deux nombres entiers relatifs alors :

$10^n \times 10^p = 10^{n+p}$ $\frac{10^n}{10^p} = 10^{n-p}$ $(10^n)^p = 10^{n \times p}$

Exemples

- $10^2 \times 10^4 = 10^{2+4} = 10^6$
- $\frac{10^3}{10^7} = 10^{3-7} = 10^{-4}$
- $(10^5)^6 = 10^{5\times6} = 10^{30}$
- $10^2 \times 10^{-4} = 10^{2-4} = 10^{-2}$
- $\frac{10^3}{10^{-7}} = 10^{3-(-7)} = 10^{10}$
- $(10^{-3})^{-2} = 10^{(-3)\times(-2)} = 10^6$

D. Ecriture scientifique

Un nombre décimal non nul est écrit en **notation scientifique** quand il est écrit sous la forme :

$a \times 10^{n}$ où : ● a est un nombre décimal tel que $1 \leqslant a < 10$,
● n est un nombre entier relatif.

Exemple et contre-exemples

- A = $3{,}27 \times 10^{-6}$ A est écrit en ***notation scientifique***.
- B = $0{,}98 \times 10^{5}$ B n'est pas écrit en notation scientifique car le *chiffre avant la virgule est 0*.
- C = $156{,}32 \times 10^{5}$ C n'est pas écrit en notation scientifique car il possède *plusieurs chiffres avant la virgule*.
- D = $6{,}54 \times 8^{3}$ D n'est pas écrit en notation scientifique car le second facteur n'est *pas une puissance de 10*.