Ecriture fractionnaire

« $\frac{4}{5}$ des gens ont des problèmes avec les fractions ! »

saviezvousque.net

I. Quotients égaux

A. Propriété

On ne modifie pas la valeur d'un quotient lorsque l'on multiplie (ou divise) le numérateur **et** le dénominateur par un même nombre (différent de 0).

Si a, b et k désignent des nombres relatifs avec $b \neq 0$ et $k \neq 0$ alors on a :

$$\frac{a}{b} = \frac{a \times k}{b \times k} \qquad \frac{a}{b} = \frac{a \div k}{b \div k}$$

Exemples

$$\frac{4}{-0,7} = -\frac{4 \times 10}{0,7 \times 10} = -\frac{40}{7} \qquad \frac{27}{12} = \frac{9 \times 3}{4 \times 3} = \frac{9}{4} \qquad \frac{-32}{44} = -\frac{8 \times 4}{11 \times 4} = -\frac{8}{11}$$

Remarque

On dit qu'on a simplifié la fraction. La fraction « la plus simple (avec les nombres entiers les plus petits possibles) » est appelée **fraction « irréductible ».**

B. Mettre au même dénominateur

On utilise la propriété précédente pour mettre deux nombres en écriture fractionnaire au même dénominateur.

Exemple

1. Ecrire les nombres $\frac{3}{7}$ et $\frac{5}{28}$ au même dénominateur.
   $\frac{3}{7} = \frac{3\times4}{7\times4} = \frac{12}{28}$
2. Mettre $\frac{7}{12}$ et $-\frac{5}{18}$ au même dénominateur.
   Dans ce cas, les dénominateurs ne sont pas des multiples, il faut chercher un multiple commun à 12 et 18.
   Multiple de 12 : 12 ; 24 ; 36 ; 48 ; …
   Multiple de 18 : 18 ; 36 ; 54 ; …
   $\frac{7}{12} = \frac{7\times3}{12\times3} = \frac{21}{36}$ $\frac{-5}{18} = -\frac{5\times2}{18\times2} = -\frac{10}{36}$

C. Produit en croix

Deux nombres en écriture fractionnaire sont égaux si leurs produits en croix sont égaux, et réciproquement.

Si a, b, c et d désignent des nombres relatifs avec b ≠ 0 et *d* ≠ 0.

- Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ alors *ad* = bc
- Si *ad* = bc alors $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

démonstration

1. Démontrons que : Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ alors *ad* = bc
   S'il y a égalité des rapports, alors les nombres sont en situation de proportionnalité :

a	C
b	D

   Le coefficient de proportionnalité k est le nombre tel que b × k = a et d × k = c

a	c
b	d

   Et alors, on vérifie bien que : a × d = bk × d = b × dk = b × c.
2. Démontrons que : Si *ad* = bc alors $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$
   On envisage des nombres a, b, c et d tels que ad = bc, b et d étant non nuls.
   On a alors $\frac{b}{a} = \frac{bd}{ad}$, donc $\frac{b}{a} = \frac{bd}{bc}$ (hypothèse), d'où $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$

Exemples

- Si $\frac{5}{2} = \frac{6}{a}$ alors 5a = 6 × 2. Donc *a* = $\frac{12}{5}$ = 2,4.
- Les quotients $\frac{-3}{6}$ et $\frac{4}{-8}$ sont-ils égaux ?
  (– 3)(– 8) = 6 × 4 donc, d'après la propriété des produits en croix, on a : $\frac{-3}{6} = \frac{4}{-8}$.

II. Additions et soustractions de nombres en écriture fractionnaire

Propriété

Pour **additionner** (ou **soustraire**) deux nombres relatifs en écriture fractionnaire :

- On écrit les nombres avec **le même dénominateur.**
- On additionne (ou on soustrait) les numérateurs et on garde le même dénominateur.

Si a, b et c désignent des nombres relatifs avec c ≠ 0, on a

$$\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{a+b}{c} \qquad \frac{a}{c}-\frac{b}{c}=\frac{a-b}{c}$$

Exemples

$$\frac{-5}{12}+\frac{-4}{3}=\frac{-5}{12}+\frac{-4\times4}{3\times4}=\frac{-5}{12}+\frac{-16}{12}=\frac{-10+(-16)}{12}=\frac{-21}{12}=-\frac{7\times3}{4\times3}=-\frac{7}{4}$$

$$\frac{-5}{6}-\frac{7}{4}=\frac{-5\times2}{6\times2}-\frac{7\times3}{4\times3}=\frac{-10}{12}-\frac{21}{12}=\frac{-10-21}{12}=\frac{-31}{12}$$

III. Multiplication des nombres en écriture fractionnaire

A. Avec les nombres relatifs

Pour **multiplier** deux nombres relatifs en écriture fractionnaire, on multiplie les **numérateurs** entre eux **et** les **dénominateurs** entre eux.

Si a, b, c et d désignent des nombres relatifs (c ≠ 0 et d ≠ 0) alors on a :

$$\frac{a}{c}\times\frac{b}{d}=\frac{a\times b}{c\times d}$$

Remarque

Il est préférable de déterminer **d'abord** le signe du produit et (si possible) de simplifier avant d'effectuer les produits.

Exemples

$A = \frac{-7}{5} \times \frac{3}{4} = -\frac{7 \times 3}{5 \times 4} = -\frac{21}{20}$

$B = \frac{-5}{3} \times \frac{9}{-8} = \frac{5 \times 9}{3 \times 8} = \frac{5 \times 3 \times 3}{3 \times 2 \times 4} = \frac{15}{8}$

$C = -4 \times \frac{7}{3} = -\frac{4 \times 7}{3} = -\frac{28}{3}$

$D = \frac{25}{16} \times \frac{48}{-75} = -\frac{25 \times 48}{16 \times 75} = -\frac{25 \times 16 \times 3 \times 1}{16 \times 25 \times 3 \times 1} = -1$

B. Inverse

Deux nombres sont inverses si le produit des deux est égal à 1.

Quels que soient les nombres relatifs a et b non nuls :

- l'inverse de a est $\frac{1}{a}$ car $a \times \frac{1}{a} = 1$
- l'inverse de $\frac{a}{b}$ est $\frac{b}{a}$ car $\frac{a}{b} \times \frac{b}{a} = 1$

Exemples

L'inverse de 4 est $\frac{1}{4}$ car $4 \times \frac{1}{4} = 1$

L'inverse de $\frac{-9}{5}$ est $\frac{5}{-9}$, c'est-à-dire $-\frac{5}{9}$ car $\frac{-9}{5} \times \left(-\frac{5}{9}\right) = 1$

IV. Division de nombres en écriture fractionnaire

Diviser par un nombre en écriture fractionnaire revient à multiplier par son inverse.

Quels que soient les nombres relatifs a, b, c et d (avec b, c et d non nuls), on a :

$\frac{a}{b} = a \div b = a \times \frac{1}{b}$ et $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$

Exemples

$E = \frac{7}{3} = 7 \div 3 = 7 \times \frac{1}{3}$

$$F = \frac{\frac{2}{11}}{\frac{-5}{8}} = \frac{2}{11} \div \frac{-5}{8} = \frac{2}{11} \times \left(-\frac{8}{5}\right) = -\frac{16}{55}$$

V. Priorités de calculs

Convention

Les règles de priorités s'appliquent aux calculs comportant des fractions :

- les calculs contenus **entre parenthèses** (ou **crochets**) sont prioritaires sur les calculs situés en dehors de ces parenthèses. La barre d'une fraction ou d'une racine carrée joue le rôle d'une parenthèse ;
- les **exposants** sont prioritaires sur les multiplications, divisions, additions et soustractions ;
- les **multiplications et divisions** sont prioritaires sur les additions et soustractions.

Exemples

$F = \frac{3}{4} - \left(\frac{5}{2} + \frac{7}{4} \times \frac{1}{2}\right)$

$F = \frac{3}{4} - \left(\frac{5}{2} + \frac{7}{8}\right)$

$F = \frac{3}{4} - \left(\frac{5 \times 4}{2 \times 4} + \frac{7}{8}\right)$

$F = \frac{3}{4} - \frac{27}{8}$

$F = \frac{6 - 27}{8}$

$F = -\frac{21}{8}$

$G = \frac{2 + \frac{1}{3}}{1 - \frac{5}{4}}$

$G = \frac{\frac{6}{3} + \frac{1}{3}}{\frac{4}{4} - \frac{5}{4}}$

$G = \frac{\frac{7}{3}}{-\frac{1}{4}}$

$G = \frac{7}{3} \div \left(-\frac{1}{4}\right)$

$G = \frac{7}{3} \times (-4)$

$G = -\frac{28}{3}$