Théorème de Pythagore

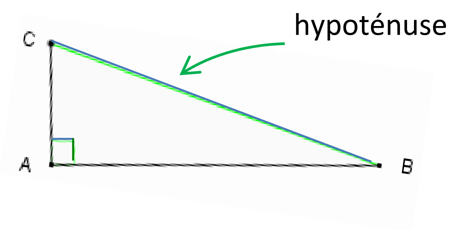
« Une pensée est une idée de passage. »

Pythagore ; Les fragments - VIe s. av. J.-C.

I. Introduction

A. Vocabulaire

Dans un triangle **rectangle**, **l'hypoténuse** est le côté **opposé** à l'angle droit.



Remarque : c'est le plus grand des 3 côtés.

B. Racine carrée

La **racine carrée** du nombre x est un nombre dont le carré est égal à x. On le note $\sqrt{x}$.

Exemples

$5^2 = 25$, on dit que « 25 est le carré de 5 ».

Et $\sqrt{25} = 5$, on dit que « 5 est la racine carrée de 25 »

Remarque

La touche $\sqrt{\square}$ ( et ) de la calculatrice sert à trouver le nombre positif dont on connait le carré.

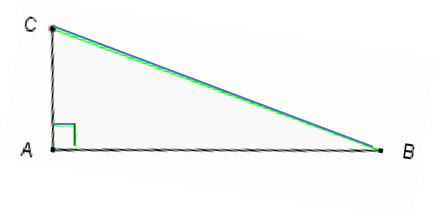
II. Théorème Pythagore

Dans un triangle **rectangle**, le carré de l'hypoténuse est égale à la somme des carrés des deux autres côtés.

Exemple

Dans le triangle ABC rectangle en A, d'après le théorème de Pythagore, on a :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$



III. Utilisation du théorème de Pythagore

Dans un triangle rectangle, en connaissant la longueur de deux côtés, on pourra déterminer la longueur du troisième côté à l'aide du théorème de Pythagore.

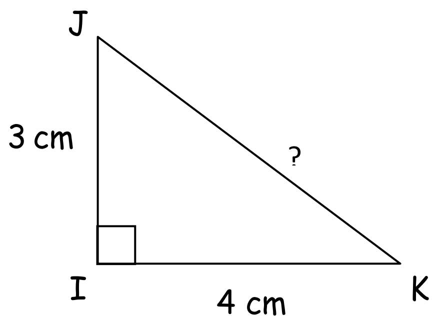
A. Calcul de la longueur de l'hypoténuse

Enoncé

IJK est un triangle rectangle au point I

avec IJ = 3 cm et IK = 4 cm.

Calculer la longueur JK.



Rédaction type

On sait que le triangle IJK est rectangle au point I,

d'après le théorème de Pythagore, on a : $JK^2 = IJ^2 + IK^2$.

D'où $JK^2 = 3^2 + 4^2$

$JK^2 = 9 + 16$

$JK^2 = 25$ (JK est le nombre positif qui a pour carré 25)

$JK = \sqrt{25}$

$JK = 5$

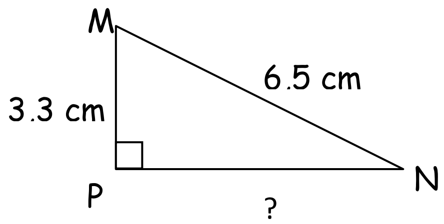
La longueur JK est égale à 5 cm.

B. Calcul de la longueur d'un côté de l'angle droit

Enoncé

MNP est un triangle rectangle au point P avec MP = 3,3 cm et MN = 6,5 cm.

Calculer la longueur PN.



Rédaction type

On sait que le triangle MNP est rectangle au point P, d'après le théorème de Pythagore, on a : $MN^2 = MP^2 + NP^2$.

D'où, $NP^2 = MN^2 - MP^2$

$NP^2 = (6,5)^2 - (3,3)^2$

$NP^2 = 42,25 - 10,89$

$NP^2 = 31,36$

$NP = \sqrt{31,36}$

$NP = 5,6$

La longueur NP est égale à 5,6 cm.

C. La contraposée du théorème de Pythagore

Propriété

Si le carré du plus grand coté d'un triangle **n'est pas** égal à la somme des carrés des deux autres cotés, **alors** le triangle **n'est pas** rectangle.

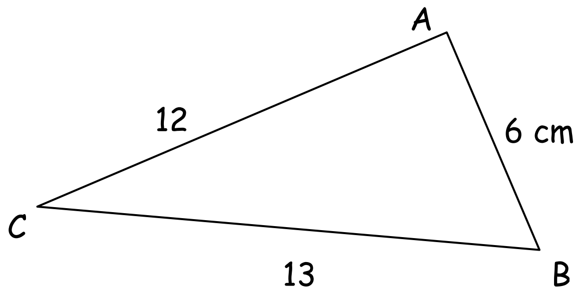
Application : Comment démontrer qu'un triangle n'est pas rectangle ?

Enoncé

Soit ABC un triangle tel que :

AB = 6cm, AC = 12 cm et BC = 13cm.

Le triangle est-t-il rectangle ?



[BC] est **le plus grand** côté

D'une part : $BC^2 = 13^2$

$= 169$

D'autre part : $AB^2 + AC^2 = 6^2 + 12^2$

$= 36 + 144$

$= 180$

Comme $BC^2 \neq AB^2 + AC^2$ alors d'après **la contraposée du théorème de Pythagore**, le triangle ABC n'est pas rectangle au point A.

IV. Réciproque du théorème de Pythagore

Dans un triangle, si le carré de la longueur du plus grand côté est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés, alors le triangle est rectangle.

Enoncé

Soit ABC est un triangle tel que : AB = 5 cm, AC = 12 cm et BC = 13 cm.

Le triangle est-il rectangle ?

[BC] est le coté **le plus long.**

D'une part : $BC^2 = 13^2$

$= 169$

D'autre part : $AB^2 + AC^2 = 5^2 + 12^2$

$= 25 + 144$

$= 169$

Comme $BC^2 = AB^2 + AC^2$ alors, d'après la **réciproque du théorème de Pythagore**, le triangle ABC est rectangle en A.